

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

..... SECCIÓ DE CIÈNCIES

COL·LECCIÓ DE CURSOS DE FÍSICA I MATEMÀTICA

Dirigida per E. TERRADAS

QÜESTIONS DE MECÀNICA CLÀSSICA I RELATIVISTA

CONFERÈNCIES DONADES EL GENER DE 1921

PER

T. LEVI CIVITA

Professor de la Universitat de Roma



INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
PALAU DE LA DIPUTACIÓ
BARCELONA

Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans

SECCIÓ DE CIÈNCIES

	Ptes.
Arxius. Any I, fascicles I, II i III. Cada un	4
» II » I, II i III.	4
» III » I, II i III.	4
» IV » I a IX.	2
» V » I a VI.	2
» VI » I i II-V.	3
Treballs del Servei tècnic del paludisme (1915-1916).....	5
Treballs de la Societat de Biologia, publicats sota la direcció d'A. PI I SUÑER.	
Volums I a VII. Cada un.....	10
Volum VIII.....	<i>En premsa.</i>
Flora de Catalunya, per J. CADEVALL i ANGEL SALLENT.	
Volum I, fascicles I a V. Cada un..	5
» II, » I a V.	5
» III, » I a III.	5
Fauna de Catalunya, dirigida per JOSEP MARIA BOFILL i PICHOT.	
Malacologia, per M. CHIA.	
Fascicles I i II. Cada un.....	5
Fascicle III.....	1
Entomologia.	
Dipters. Fascicle I, per J. ARIAS ENCÓBET.....	5
Colèpters, G. CARABUS. Fascicle I, per A. CODINA.....	5
Neuròpters.—Monografia general de Catalunya, pel P. LONGI NAVAS, S. I.....	<i>En premsa.</i>
Hemípters, per A. CODINA.	<i>En premsa.</i>
Treballs de la Institució Catalana d'Història Natural.	
Volums I a V. Cada un.....	10
Treballs de l'Estació Aerològica de Barcelona, per E. FONTSERÉ.	
Volum I a III. Cada un.....	4
Monografia mundial de l'ordre dels Rafidòpters (Ins.), pel Rvnd. P. LONGI NAVAS, S. I.....	4
Col·lecció de Cursos de Física i Matemàtica, dirigida per E. TERRADAS.	
Volum I.—Els elements discrets de la matèria de la radiació.—Conferències per E. TERRADAS, recollides per I. PÒLIT.....	3
Volum II.—Teoria de la representació conforme.—Conferències donades el juny de 1915 per J. REY PASTOR, redactades per E. TERRADAS....	3
Volum III.—Poincaré i la teoria de les equacions diferencials.—Conferències per J. HADAMARD, recollides per E. TERRADAS i B. BASSEGODA.	3
Volum IV.—Propietats dels gasos ultraenrarits, per J. PALACIOS....	3
Volum V.—Qüestions de Mecànica clàssica i relativista, per T. LEVI CIVITA.....	3

	Ptes.
Volum VI.—Anàlisi matemàtic del problema de l'espai, per H. WEYL.	<i>En premsa.</i>
Volum VII.—Conferències sobre Física teòrica, per A. SOMMERFELD.	<i>En premsa.</i>
Biblioteca Filosòfica, dirigida per EUGENI D'ORS.	
Volum I.— <i>Vives a Anglaterra</i> , per FORSTER WATSON.....	10
Volum II.— <i>La Natura i la Història</i> , per PEDRO DORADO MONTERO....	6

SECCIÓ FILOLÒGICA

Himnes homèrics. Traducció en vers de JOAN MARAGALL i text grec amb la traducció literal de P. BOSCH GIMPERA....	<i>(Exhaurit.)</i>
El Gènesi. Versió de l'hebreu segons els textos originals, i amb anotació, de MN. FREDERIC CLASCAR.	
Un vol. de 476 pàgines.....	5
Edició en paper de fil.....	20
Museu: Hero i Leandre. Text grec amb la versió literal en prosa de LL. SEGALÀ i en hexàmetres d'AMBROSI CARRIÒ, duent en apèndix les traduccions inèdites, en vers, de P. BERTRAN i BROS i J. M. PELLICER i PAGÈS.	
Un vol. de 80 pàgines.....	2
Edició en paper de fil.....	5
Mireia. Poema provençal de Frederic Mistral. Traducció catalana de MARIA-ANTÒNIA SALVÀ.....	<i>(Exhaurit.)</i>
Edició en paper de fil.....	15
El Càntic dels Càntics. Versió de l'hebreu per MN. FREDERIC CLASCAR.....	3
Ortografia Catalana, segons el sistema adoptat per l'Institut d'Estudis Catalans....	<i>(Exhaurit.)</i>
Els IV llibres de les Geòrgiques de Publi Virgili Maró, traducció en vers per MN. LLORENÇ RIBER.....	6
L'Èxode. Versió de l'hebreu per MN. FREDERIC CLASCAR.....	<i>En premsa.</i>
Tàcit. La Germània. Traducció de C. RIBA BRACONS.....	<i>En premsa.</i>
Butlletí de Dialectologia catalana (publicació semestral des de 1913).	
Vol. I (abril-desembre 1913).....	3
» II (gener-juny 1914).....	1'50
» II (juliol-desembre 1914).....	2
» III (gener-juny 1915).....	2'50
» III (juliol-desembre 1915).....	2'50
» IV (gener-juny 1916).....	3
» IV (juliol-desembre 1916).....	3
» V (gener-desembre 1917).....	3
» VI (gener-juny 1918).....	2'50
» VI (juliol-desembre 1918).....	2'50
» VII (gener-desembre 1919).....	5
» VIII (gener-desembre 1920).....	5
» IX (gener-desembre 1921).....	5

**QÜESTIONS DE MECÀNICA
CLÀSSICA I RELATIVISTA**

This One:



EQE203WCBSQ

PUBLICACIONS DE L'INSTITUT DE CIÈNCIES
COL·LECCIÓ DE CURSOS DE FÍSICA I MATEMÀTICA
Dirigida per E. TERRADAS

QÜESTIONS DE MECÀNICA CLÀSSICA I RELATIVISTA

CONFERÈNCIES DONADES EL GÈNER DE 1921

PER

T. LEVI CIVITA

Professor de la Universitat de Roma

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
PALAU DE LA DIPUTACIÓ
BARCELONA

IMPREMTA DE LA CASA DE CARITAT : MONTALEGRE, 5 : BARCELONA

SUMARI

CONFERÈNCIA I

REGULARITZACIÓ DEL PROBLEMA DELS TRES COSSOS I ABAST QUE ELLA ASSOLEIX

1. Generalitats sobre la integració de les equacions diferencials ordinàries.
2. Problema dels tres cossos. Resum de les recerques sobre la condició de xoc.
3. Primera regularització assolida. Resultat fonamental de Sundman.
4. Problema pla. Lemes de comportament analític.
5. Regularització canònica del problema pla.
6. El problema en l'espai. Espècies varies d'elements el·líptics.
7. Transformació canònica deduïda del moviment parabòlic. Regularització d'un xoc binari.
8. Paràmetre simètric. Regularització completa.
9. En quin sentit es pot dir resolt el problema.
10. Significat mecànic de la prolongació analítica.
11. Predicció a termini breu. Seguretat secular.
12. Dubtes crítics. Justificació intuïtiva de la seguretat.

CONFERÈNCIA II

LES ONES EN ELS LÍQUIDS; PROPAGACIÓ EN ELS CANALS

1. Què és un moviment per ones?
2. Ones progressives de tipus permanent. Caràcters essencials.
3. Ones trocoidals de Gerstner. Llur insuficiència com a prototipus del fenomen real.
4. Ones irrotacionals.
5. Característica de massa.
6. Conseqüències analítiques. Pla γ .
7. Relació global. Existència necessària d'un transport superficial.
8. Expressió de la velocitat mitjana de transport.
9. Condicions dinàmiques. Equació funcional característica.

10. Ones periòdiques. Forma corresponent de l'equació funcional.
11. Primera aproximació. Ones senzilles.
12. Equació d'Airy.
13. Valor explícit dels diversos elements del moviment.
14. Observació respecte del càlcul de τ' . Valor de la velocitat de transport.
15. Existència de les solucions rigoroses. Indicacions de les recerques de Ciosotti.

CONFERÈNCIA III

PARAL·LELISME I CURVATURA EN UNA VARIETAT QUALSEVOL

1. Paral·lelisme superficial.
2. Primeres conseqüències. Equipol·lència superficial de vectors.
3. Transport infinitesimal. Forma diferencial de la llei de paral·lelisme.
4. Desplaçaments virtuals. Equació simbòlica.
5. Caràcter intrínsec de la noció de paral·lelisme.
6. Representació analítica.
7. Transport per equipol·lència. Commutabilitat.
8. Sobre la varietat d'un nombre qualsevol de dimensions.
9. Extensió del concepte de paral·lelisme. Fórmules i propietats consegüents.
10. Teorema de Severi.
11. Algunes fórmules.
12. Transport cíclic d'una direcció. Cas d'un cicle infinitèsim. Diferència angular. Fórmula de Pèrès.
13. Relacions entre paral·lelisme i curvatura.

CONFERÈNCIA IV

L'ÒPTICA GEOMÈTRICA I LA RELATIVITAT GENERAL D'EINSTEIN

- I. Invocacions a l'òptica geomètrica segons l'esquema clàssic.
- II. Energia i matèria com aspectes distints d'una mateixa entitat física.
- III. La relativitat general i les seves conseqüències concretes tocant a la trajectòria dels raigs lluminosos en un camp de forces.

CONFERÈNCIA I

REGULARITZACIÓ DEL PROBLEMA DELS TRES COSSOS I ABAST QUE ELLA ASSOLEIX

I. GENERALITATS SOBRE LA INTEGRACIÓ DE LES EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES

Sigui t una variable independent, i siguin $x_1, x_2, \dots, x_n$ funcions incògnites de la t , les quals han de verificar un sistema d'equacions diferencials de la forma:

$$(I) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

en les quals els segons membres són funcions conegudes de les x i de t .

Integrar el sistema ha significat sempre, des de la invenció del Càlcul fins avui, caracteritzar d'alguna manera les funcions incògnites $x_i(t)$. La més encertada manera de realitzar-ho pot variar segons la natura específica de la qüestió que s'estudia. Però els mètodes analítics de què es disposa s'han anat multiplicant i afinant.

Primerament es considerava com a criteri únic d'integració el de substituir, tant com fos possible, les equacions diferencials (I) per altres tantes relacions en termes finits entre les x_i i la t , expressades mitjançant les anomenades transcendents elementals, i així la discussió dels valors de les funcions $x_i(t)$ quedava reduïda a un problema menys elevat, això és, la resolució d'equacions en

termes finits. Amb tal procés s'aconseguí en certs casos caracteritzar d'una manera acabada les incògnites, però en altres, no es fa altra cosa que enretirar la dificultat; i, sobretot, és limitadíssima la classe d'equacions integrables amb transcendents elementals, per la qual cosa resulta evident que la qüestió s'ha d'abraçar d'una altra manera.

Ja els analistes del segle XVIII havien assajat desenrotllaments en sèrie i procediments aproximats, mes és precis arribar a Cauchy per a la demostració del teorema d'existència, la qual implica un tractament sistemàtic del problema *local*, és a dir, la construcció d'un algoritme apte a representar sota forma de sèrie les funcions $x_i(t)$ als vols de t , és a dir, en un entorn prou petit de valors de t .

D'una manera precisa (referint-nos, per a fixar les idees, al camp de les funcions analítiques), si els segons membres X_i són funcions regulars de tots llurs arguments al volt de certs valors qualssevol $x_i^{(0)}$, t_0 , el teorema d'existència sosté que hi ha una solució, i sols una, definida pels valors inicials $x_i^{(0)}$, t_0 , és a dir, un sol sistema de funcions $x_i(t)$ que verifiquin la (I), que siguin regulars per a valors de t veïns de t_0 , i, finalment, que per $t = t_0$ es facin iguals als valors donats a priori $x_i^{(0)}$.

Si les funcions X_i presenten singularitats, fins el simple estudi local de les integrals és considerablement difícil; i, malgrat els clàssics resultats de Briot i Bouquet, Fuchs, Poincaré i Picard, sols es coneixen certs aspectes particulars, encara que notables, de la qüestió.

Tornem a un entorn en el qual les funcions X_i són regulars. Una solució determinada pels seus valors inicials pot ésser definida per a valors de t veïns de t_0 , però ço que interessa, restant en la consideració de valor reals, és conèixer-la per a valors qualssevol de t entre $-\infty$ i $+\infty$, o, almenys, conèixer tot el camp d'existència de la solució.

Un estudi global d'aquesta manera és, per regla ge-

neral, molt difícil, i en els problemes d'interès conexe s'hi arriba cas per cas amb criteris particulars diversos (generalment partint d'expressions formals dels integrals ja coneguts). Poincaré, en les seves recerques memorables sobre corbes definides per equacions diferencials, ha obert noves vies a la investigació; però són encara poques les classes de sistemes diferencials per a les quals es pot arribar al fi desitjat.

La major dificultat prové, com s'ha dit, de les eventuals singularitats dels segons membres de la (I). Posem-nos, de moment, en el cas més favorable en el qual les singularitats no destorbin, i vejam fins on es pot arribar. Les X_i es mantenen per hipòtesis regulars i inferiors a un número donat M , qualssevol que siguin els valors de les x_i en un cert camp Γ , i els de t en una franja del mateix pla de variable imaginària, franja que comprèn enterament l'eix real i té una amplada mínima a , és a dir, que abraça l'àrea compresa entre dues paral·leles a l'eix real que disten a entre elles. Suposem, encara, que se sap, d'una manera o altra, que tota solució $x_i(t)$ de les (I) determinada a partir de $t = t_0$, per valors inicials $x_i^{(0)}$ continguts en un cert camp Γ' dintre de Γ , no pot sortir de Γ' al variar t al llarg de l'eix real. Està demostrat que, en tal cas, les $x_i(t)$ són funcions regulars de t de $-\infty$ a $+\infty$.

Es tracta d'un corol·lari fàcil del teorema d'existència en el qual val la pena de fixar-se un moment. Que Γ' estigui dintre de Γ voldrà dir que, qualssevol que siguin els valors $x_i^{(0)}$ dins Γ' existeix un entorn $|x_i - x_i^{(0)}| \leq b$ (essent b constant), el qual entorn està contingut dins Γ .

Amb tals hipòtesis i condicions, sigui T el més petit dels dos números a i $\frac{b}{M}$. El teorema d'existència permet afirmar que tota solució $x_i(t)$ és, a partir d'un valor real

determinat de t , prolongable analíticament dintre d'un cercle de radi T , en particular per $\pm T$ al llarg de l'eix real. Aquest eix pertany, doncs, tot sencer al camp de regularitat de les funcions $x_i(t)$, i en particular queda dins de l'estrella de Mittag-Leffler d'una x_i relativa a qualsevol dels seus punts. Per això les $x_i(t)$ són, en tal cas, representables en sèries de polinomis de t convergent uniformement al llarg de l'eix real.

Com es veu, almenys des del punt de vista matemàtic de representar la funció amb algorisme convergent, s'és arribat a abraçar tot el camp real d'existència passant del local al global.

Amb això no queda assolida la caracterització completa dels integrals que permet donar-se compte de les variacions qualitatives, de la periodicitat, estabilitat, caràcter asimptòtic, etc., als quals estudis, per llur gran importància d'aplicació i de concepte, van endreçats, des de Poincaré, els esforços i estudis dels geòmetres. Però aquesta part tan interessant ve subordinada al camp de regularitat dels segons membres X_i . Per això pot dir-se doblement privilegiada la categoria de sistemes que romanen regulars en el camp real, i queda patent l'interès que hi ha a reduir el sistema diferencial que presenta singularitat a un altre que no en tingui. En això consisteix la *regularització*.

2. PROBLEMA DELS TRES COSSOS.

RESUM DE LES RECERQUES SOBRE LA CONDICIÓN DE XOC.

Ofereix un exemple adequat d'aquesta categoria de sistemes regularitzables el problema famós dels tres cossos. Es tracta, com és ben sabut, del moviment de tres punts materials O , P , P' sotmesos a l'atracció mútua que formula la llei de Newton.

Les equacions diferencials del moviment, en una qualsevol de llurs formes clàssiques, es comporten sempre regularment en el camp real, mentre les posicions dels tres cossos són distintes, i presenten, en canvi, singularitats quan vénen a coincidir dos dels tres cossos o tots tres alhora.

L'estudi analític del comportament del sistema als volts d'un xoc va ésser iniciat per Painlevé, fa uns trenta anys. Va ésser aleshores demostrat per via rigorosa ço que sembla intuïtiu, això és, que *si pel valor t_1 del temps t el moviment no es manté regular, necessàriament o bé una de les tres distàncies es fa nul·la o totes tres alhora s'hi fan.*⁽¹⁾

D'aquests estudis, Painlevé⁽²⁾ en deduí que les condicions de xoc de dos cossos eren expressables, segons tota probabilitat, per dues relacions uniformes entre les coordenades i les components de la velocitat dels tres cossos, i que, en el cas particular del problema pla, era prou una única condició, reduint-se l'altra a una identitat.

Aquestes indicacions de Painlevé em portaren a fer un estudi del moviment als volts immediats d'un xoc, limitant-me, per a concentrar l'esforç en els fronts essencials, al cas més senzill del problema restringit.⁽³⁾

Es tracta, com se sap, d'un cas particular del problema pla en el qual un dels tres cossos, vg. P, té una massa indefinidament petita fins al punt de no tenir influència en el moviment dels altres cossos O i P'. Es

1. Com es veu, queda exclosa l'eventualitat, possible *a priori*, si bé poc d'acord amb la intuïció física, que dos cossos puguin acostar-se tant com es vulga sense caure l'un sobre l'altre o bé sense que la distància mútua sigui sempre decreixent.

2. *Leçons, etc. ... professées à Stockholm.* (París, Hermann, 1897; pàgs. 582, 586.)

3. *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi.* (*Ann. di Matematica.* Sèrie III, tom IX. 1903. Pàgs. 1-32.)

suposa que O i P' es mouen de la més senzilla manera compatible amb la llei de Newton, és a dir, que rodin uniformement entorn del centre de gravetat comú G.

El problema es pot referir a l'estudi del moviment de P en el pla en què es mouen O i P' per l'acció mútua que els atrau.

En el cas del problema restringit no hi ha altre xoc possible que el de P amb O o amb P'.

El xoc té lloc sempre segons una direcció ben determinada, és a dir, considerant un xoc en el moment t_1 , entre O i P per exemple, si s'anomenen r i θ les coordenades polars de P respecte de O no solament

$$\lim. r = 0 \quad \text{per } t = t_1$$

com resulta dels estudis de Painlevé, sinó que també existeix un límit θ_1 per θ . La velocitat v es fa infinita, mes

$$\sqrt{r} v$$

és finita; propietats, totes elles, perfectament establertes i demostrades.

Transformant el sistema diferencial i tenint en compte certes recerques sobre les singularitats polars, pot posar-se en forma explícita la condició de xoc, que és única i uniforme, com havia afirmat Painlevé.

Poc temps després, Bisconcini⁽¹⁾ investí sobre la base de principis semblants l'estudi del xoc binari pel problema general dels tres cossos, arribant a donar en forma explícita dues relacions uniformes característiques del xoc, i així va quedar plenament confirmada la indicació de Painlevé.

Per altra part⁽²⁾ Sundman, examinant el cas d'un

1. *Sur le problème des trois corps.* (*Acta Math.* Tom 30. 1906. Pàgines 49-92.)

2. *Recherches sur le problème des trois corps.* (*Acta scientiarum Societatis Fennicae.* Tom XXXIV. N. 6. Helsingfors. 1907.)

xoc general, pogué demostrar que és condició necessària, perquè això esdevingui, que s'anul·li el moment resultant de la quantitat de moviment dels cossos. És aquest moment $\mathfrak{M}$ un vector global necessàriament constant per a tota la durada del moviment d'un sistema material qualsevol subjecte a forces internes solament, com succeeix en el cas del problema dels tres cossos.

Si les condicions inicials són tals que $\mathfrak{M}$ no és nul, es pot considerar fora d'examen l'eventualitat d'una col·lisió general, i, per conseqüència, les úniques singularitats locals que cal tenir en compte són els tres xocs binaris.

Sembla que Weierstrass havia reconegut l'abast de la restricció $\mathfrak{M} \neq 0$ en l'estudi analític del problema dels tres cossos⁽¹⁾ però és de justícia atribuir la proposició a Sundman, que no solament la retrobava, sinó que en publicava la demostració i en treia partit sistemàtic.

3. PRIMERA REGULARITZACIÓ ASSOLIDA. RESULTAT FONAMENTAL DE SUNDMAN.

Aquests aventatges dugueren la confiança que les singularitats analítiques corresponents al fenomen de xoc són, en realitat, menys formidables del que fou temut des d'un principi. I, en efecte, al cap de poc temps vaig trobar que, almenys en el problema restringit, el xoc binari és regularitzable amb mitjans singularment senzills: resultats que varen ésser comunicats al Congrés de Matemàtics de Heidelberg en 1904, i exposats, amb llurs conseqüències, en una Memòria de les *Acta Math.* (T. 30, 1906; pàgs. 305-327).

1. *Zur Biographie von Weierstrass.* (*Acta Math.* Tom 35. 1911. Pàg. 30.)

Com se sap, correspon a Sundman el mèrit d'haver regularitzat per primer cop, de manera completa, el problema dels tres cossos. El treball⁽¹⁾ obtenia en 1913 el premi Pontécoulant de l'Acadèmia de Ciències de París i va fer gran efecte entre els matemàtics. Transcendia àdhuc al gran públic, que fou assabentat que era trobada la solució del famós problema dels tres cossos, cercada en va des de Newton.

Les consideracions preliminars fetes en parlar dels sistemes d'equacions diferencials indiquen en quin sentit és permès parlar de problema *resolt*, ensems que assenyallem quines i quantes qüestions estan encara per resoldre, si bé la majoria estan subordinades a la primordial regularització de què ens ocupem.

Sobre l'abast d'aquest pas indiscutiblement essencial em proposo retornar més endavant. Fixem-nos, per ara, en els mitjans aptes a la seva realització. La via seguida per Sundman era indirecta : necessita la introducció d'un nombre, més aviat gran, de variables auxiliars i càlculs poc elegants, per donar lloc a un sistema regularitzat que no entra en l'àmbit de les equacions de la dinàmica; i això constitueix un inconvenient greu, perquè ja no és permès (almenys sense discussió preliminar) l'aplicar a tals sistemes els resultats teòrics ni els mètodes de càlcul de la mecànica analítica.

Pel problema pla he aconseguit una regularització dels xocs binaris verament dinàmica i que conserva tots els aventatges del sistema d'origen, fins comprnent-hi la forma canònica.⁽²⁾

En substància és la mateixa transformació que abans

1. *Mémoire sur le problème des trois corps.* (*Acta Math.* Tom 36. 1912. Pàgs. 105-179.)

2. *Rend. dei Lincei.* Vol. XXIV (2.º semestre 1915), pàgines 61-75.

d'ésser coneguts els treballs de Sundman m'havia permès regularitzar el problema restringit. Per la seva gran senzillesa l'exposaré aquí.

4. PROBLEMA PLA. LEMES DE COMPORTAMENT ANALÍTIC.

Considerem, en el pla dels tres cossos, un sistema d'eixos $O x_1 x_2$ amb l'origen mòbil col·locat en el punt O , però de direcció invariable.

Siguin x_1, x_2 i x'_1, x'_2 les coordenades de P i P' referides a aquests eixos, i siguin p_1, p_2 i p'_1, p'_2 les components de les quantitats de moviment respectives, amb referència al centre de gravetat G de la terna, i així $-(p_1 + p'_1), -(p_2 + p'_2)$ seran les components de la quantitat de moviment de O .

Diguem m_o, m, m' a les masses de O, P, P' ; r, r', Δ a les tres distàncies OP, OP', PP' ; f a la constant d'atracció universal. Amb tal nomenclatura la funció de forces és

$$U = f \left\{ \frac{m_o m}{r} + \frac{m_o m'}{r'} + \frac{m m'}{\Delta} \right\},$$

funció holomorfa de x_1, x_2, x'_1, x'_2 en tot el camp real d'aquests arguments menys per valors nuls de r, r' o Δ .

Escrivin

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) \quad (\text{Força viva de } P)$$

$$\mathcal{F}' = \frac{1}{2m'} (p'^2_1 + p'^2_2) \quad (\text{Id. de } P')$$

$$\mathcal{F}_o = \frac{1}{2m_o} \left\{ (p'_1 + p_1)^2 + (p'_2 + p_2)^2 \right\} \quad (\text{Id. de } O)$$

$$T = \mathcal{F} + \mathcal{F}' + \mathcal{F}_o, \quad H = T - U.$$

La funció H ho serà de les quatre coordenades x_1, x_2, x'_1, x'_2 i de les quatre components de la quantitat de moviment baricèntriques p_1, p_2, p'_1, p'_2 ; la qual funció no té més singularitats que les ja assenyalades respecte de U i amb valors infinits eventuais de la velocitat, és a dir, de p_1, p_2, p'_1, p'_2 .

Les equacions del moviment en la forma canònica de Poincaré es poden escriure

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases} (j = 1, 2),$$

amb altres semblants relatius als valors accentuats. Són, com es veu, un sistema normal. Els segons membres són derivats de H , i, per tant, vénen afectats de singularitats locals quan s'anul·len r, r' o Δ o quan les velocitats es fan infinities. Això últim és conseqüència de l'anterior, perquè el teorema de forces vives

$$H = \text{Constant}$$

o sia

$$T - U = \text{Const}$$

demostra que, mentre el límit inferior de les distàncies mútues sigui diferent de zero, com que U és finita, també ho és T , i, per tant, tota vegada que T és forma quadràtica definida, també és finita cadascuna de les p .

Per altra part, com s'ha dit abans, en el cas en què $\mathcal{M}$, moment resultant de les quantitats de moviment, no sigui zero, queda exclosa una col·lisió general. Si es considera un xoc binari, per exemple, entre P i O , es pot demostrar, com a conseqüència de determinades consideracions respecte al comportament qualita-

tiu de la dita singularitat, el conjunt de propietats que vénen referides tot seguit i que no són sinó l'expressió sota forma analítica precisa del que suggereix immediatament la intuïció mecànica del xoc entre dos cossos en presència d'un tercer que roman estrany al fenomen. A saber⁽¹⁾:

a) En acostar-se t al moment del xoc t_1

$$\lim_{(t \rightarrow t_1)} r = 0.$$

b) La posició i la velocitat baricentral del tercer cos P' i, per tant, les quatre variables que li corresponen x' p' , convergeixen a límits finits determinats per $t \rightarrow t_1$. És a dir

$$\lim_{(t \rightarrow t_1)} r' = \lim_{(t \rightarrow t_1)} \Delta_{(t \rightarrow t_1)} > 0.$$

c) La fracció $\frac{1}{r}$ és infinita per $t = t_1$ segons expressa la condició a), però resta integrable, de tal manera que, posant

$$du = \frac{dt}{r}$$

queda definit, llevat d'una constant additiva, un paràmetre u que creix sempre amb t i convergeix cap a un valor finit u_1 quan $t \rightarrow t_1$.

$$d) \quad \lim_{(t \rightarrow t_1)} r \mathfrak{E}_{(t \rightarrow t_1)} = \lim_{(t \rightarrow t_1)} r \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2)_{(t \rightarrow t_1)} = f m_o m,$$

propietat que es dedueix de la integral de forces vives multiplicant per r i passant al límit.

1. Sur la régularisation du problème des trois corps. (Acta Math. Tom 42. 1918. Pàgs. 99-143, cap. I.)

5. REGULARITZACIÓ CANÒNICA DEL PROBLEMA PLA

Tot això establert, observi's que les equacions diferencials (1) no alteren afegint a H una constant qualsevol. Per altra part, les (1) aquelles admeten, com ja s'ha observat, la integral de forces vives $H = \text{Constant}$. Designant per E la constant del segon membre i fixant l'atenció en la categoria de solucions que corresponen a un valor ben determinat de E (però, altrament, qualsevol), podem imaginar substituït $H - E$ per H en les equacions (1). Això té l'avantatge (que aprofitarem aviat) que $H - E$ s'anul·la al llarg de qualsevol de les solucions de què es tracta. Per tant, si s'anomena α a un qualsevol dels arguments x_j, p_j, x'_j, p'_j , si alhora s'escriu

$$(2) \quad H^* = r(H - E) = r\mathfrak{F} + r(\mathfrak{F}' + \mathfrak{F}_0) - rU - rE$$

(no sortint de la categoria de solucions que es consideren) i si, finalment, en lloc de t s'introdueix la variable independent u definida en l'apartat c), el sistema diferencial (1) esdevé

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{dx_j}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j} \\ \frac{dp_j}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2) \end{cases}$$

amb altres operacions semblants relatives a lletres accentuades. Aquest sistema compta amb la integral $H^* = \text{Constant}$, però sols interessa la categoria de solucions per a la qual $H^* = 0$, que correspon a la del sistema (1) en què $H = E$.

La senzilla transformació amb la qual s'ha fet el pas de (1) a (1') va ésser introduïda per mi fa uns vint

any a propòsit del problema restringit. Pot qualificar-se de transformació Darboux-Sundman, perquè afegeix el criteri de fixar E usat per Darboux en l'estudi de les trajectòries, amb la transformació de variable independent adoptada per Sundman. Si es conserva l'estructura analítica de la funció H^* en acostar-se un xoc binari entre P i O , es veu tot seguit que l'ús de la H^* ofereix positius avantatges. En efecte : els infinits han desaparegut, perquè la multiplicació per r l'ha feta desaparèixer del terme $f \frac{m_o m}{r}$ de U , i, per ço que deixem establert en l'apartat d), també el terme $\mathfrak{J}$ de T queda arranjat a bastament.

Però encara no es pot parlar de funcions regulars respecte de totes les variables, perquè, entrant-hi r , presenta la funció H^* un punt crític respecte a x_1, x_2 pels valors nuls d'aquestes variables, i, demés, en virtut de d), $\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2$ creix indefinidament, de manera que fins respecte a les variables p_1, p_2 el xoc no queda inclòs en el camp de regularitat.

Una transformació ulterior en la qual intervenen solament les quatre variables $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, elementalíssima, permet la regularització de manera completa *tot i conservant la forma canònica del sistema diferencial*.

Basta substituir 1) a x_1, x_2 dues variables noves lligades amb les primeres per la relació complexa

$$(3) \quad x_1 + ix_2 = (\xi_1 + i\xi_2)^2$$

i 2) a les p_1, p_2 dos arguments nous π_1 i π_2 , tals que

$$(4) \quad p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = \pi_1 d\xi_1 + \pi_2 d\xi_2$$

sigui una identitat, havent en compte la (3).

La condició 4), de la qual se'n podrien deduir les expressions explícites de π_1 i π_2 , és tal, que en les noves variables ξ_1 , ξ_2 , π_1 i π_2 les equacions conserven la forma canònica.

En forma més concreta, es pot posar:

$$(5) \quad p_1 + ip_2 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{2(\xi_1 - i\xi_2)}.$$

La 4) resulta, així, una conseqüència evident de la (3) i de la (5), obtinguda diferenciant la primera, canviant en la segona i en $-i$ i multiplicant membre a membre.

De les equacions (3) i (5), se'n dedueix també, observant que r és el mòdul de $x_1 + ix_2$ i anomenant ρ el mòdul de $\xi_1 + i\xi_2$,

$$(6) \quad r = \rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2;$$

i de (5) igualant els quadrats dels mòduls

$$(7) \quad p_1^2 + p_2^2 = \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{4\rho^2}.$$

Multiplicant els dos membres de (5) per

$$r = (\xi_1 + i\xi_2)(\xi_1 - i\xi_2),$$

s'obté

$$(8) \quad r(p_1 + ip_2) = \frac{1}{2} (\pi_1 + i\pi_2) (\xi_1 + i\xi_2).$$

D'aquesta última, igualant els quadrats dels mòduls, surt:

$$\frac{r}{2m} (p_1^2 + p_2^2) = \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{8m} = f m_o m$$

la qual demostra que $\pi_1^2 + \pi_2^2$ roman finit quan els dos cossos P i O tendeixen al xoc; i això, tenint present la circumstància de tendir la direcció OP a un límit ben de-

terminat, assegura que π_1 i π_2 tenen, cadascun, límits perfectament determinats alhora.

De les equacions (3), (6), (7) i (8) resulta que x_1 , x_2 , r , $r(p_1 + p^*)$, rp_1 , rp_2 són totes funcions de segon grau de les noves variables ξ_1 , ξ_2 , π_1 i π_2 , quedant assegurada la regularitat d'aquelles als volts de $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ i d'aquells valors finits de π_1 i π_2 que corresponen a un xoc.

Si ara s'observa que $\frac{1}{r'}$ i $\frac{1}{\Delta}$ són regulars als volts d'un xoc, tant respecte a x_1 , x_2 com a x'_1 , x'_2 , és natural que aquest caràcter sigui conservat substituint ξ_1 i ξ_2 a x_1 i x_2 . En el valor de

$$H^* = r(T - U - E)$$

les variables x_1 , x_2 , p_1 , p_2 intervenen solament per haver-hi r i $r(p_1^2 + p_2^2)$ en l'expressió de $\mathfrak{J}$ i per haver-hi rp_1 i rp_2 en el valor de $\mathfrak{J}_0$. Per tant, és assolida la regularització completa de H^* i, per consegüent, del sistema diferencial relatiu a les noves variables, que resta canònic amb la funció característica H^* expressada en termes de les noves variables : sistema que es pot escriure

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{du} &= \frac{\partial H^*}{\partial \pi_j}, \quad \frac{dx'_j}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p'_j} \\ \frac{d\pi_j}{du} &= -\frac{\partial H^*}{\partial \xi_j}, \quad \frac{dp'_j}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x'_j} \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

6. EL PROBLEMA EN L'ESPAI.

ESPÈCIES VÀRIES D'ELEMENTS EL·LÍPTICS.

Si del problema pla es passa al cas de l'espai, les fórmules cartesianes conserven el mateix aspecte, però augmenta en dos el nombre de graus de llibertat, intervenint-hi

cadascun dels dos cossos P i P' una coordenada de més, x_3 i x'_3 respectivament, i amb elles les quantitats de moviment p_3 i p'_3 . Conservant per a r , r' i Δ els significats ja coneguts de distàncies mútues, es podrà escriure ara:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

$$\mathcal{T}' = \frac{1}{2m'} (p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3)$$

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{2m_0} \left\{ (p_1 + p'_1)^2 + (p_2 + p'_2)^2 + (p_3 + p'_3)^2 \right\}.$$

A les T, U, H se'ls conservarà el significat ja conegut.

Durant un cert temps vaig estar buscant la manera d'adaptar a l'espai la transformació elemental

$$x_1 + ix_2 = (\xi_1 + i\xi_2)^2$$

que permet tan senzillament la regularització en el pla. Creia, demés, que no havia de renunciar a l'assaig d'una transformació en la qual intervingués tan sols x_i i p_i , sense cap intervenció dels elements que defineixen la posició i el moviment de P'.

Per altra part, la regularització ja aconseguida de Sundman donava una certa confiança, si no garantia, que havia d'haver-hi per al problema general una regularització mecànica intrínseca. Era, doncs, justificat insistir en la temptativa de trobar-la.

Però a res no pogueren conduir-me les transformacions purament puntuals, és a dir, tals que x_1 , x_2 , x_3 fossin substituïdes per la terna de noves variables ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 i amb les conjugades definides per la relació diferencial

$$(9) \quad p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 = \pi_1 d\xi_1 + \pi_2 d\xi_2 + \pi_3 d\xi_3.$$

De manera que, no sortint-ne amb les transformacions purament puntuals, recorria a altres de més genera-

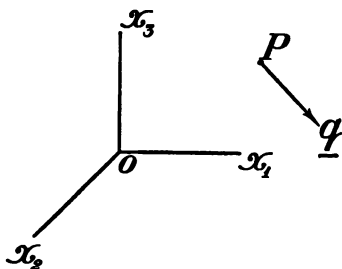
litat, sempre entre les de contacte, és a dir, a transformacions entre (x_i, p_i) i les noves (ξ_i, π_i) que verifiquen la (9). Ho són, per exemple, les transformacions que ofereix el mètode d'integració de Jacobi, i en particular la transformació clàssica o una de les seves variants introduïdes per Poincaré, que passa de les x_i, p_i a les anomenades *variables keplerianes*, les quals tenen un sentit precís relativament a l'òrbita el·líptica osculatriu, el focus de la qual és O i que defineixen els valors instantanis de les x_i, p_i .

Però cap de les transformacions referents al moviment el·líptic és regularitzant per al problema dels dos cossos P, O, ni menys per al xoc binari en el problema dels tres cossos.

En el cas del moviment parabòlic, en canvi, el mètode de Jacobi permet trobar una transformació regularitzant als volts de O.

No és difícil de comprendre el significat geomètric i cinemàtic de les noves variables (ξ_i, π_i) que vindran a substituir a les (x_i, p_i) .

Sigui un instant determinat t , i consideri's en tal ins-



tant el punt P i el vector $\underline{q}$ definits respectivament per les coordenades x_i i les components p_i relatives a l'instant t . El vector $\underline{q}$ representa la quantitat de moviment de P referida al centre de gravetat G dels tres cossos, si amb la

mateixa lletra q designarem la llargada del mateix. Sigui un moviment hipotètic, que serà dit *intermediari* o bé, encara que impròpiament, osculador, en el qual 1) q sigui la quantitat de moviment de P en l'instant t , referida a O en lloc de a G, 2) la força sobre P és l'atracció provinent de O, segons el potencial

$$\frac{f m_o m}{r}.$$

Per als planetes i alguna volta per als cometes,

$$\mathcal{E} - \frac{f m_o m}{r} = \frac{1}{2m} q^2 - \frac{f m_o m}{r} < 0.$$

Si la mateixa condició fos vàlida per al moviment intermediari, aquest fóra el·líptic keplerià i podria oferir-nos transformacions de les x_i , p_i en elements keplerians, sobre els quals hem dit ja alguna cosa.

Però la referència del fenomen real a moviments hipotètics en els quals tant P com q tinguin els mateixos valors en l'instant escollit t , pot fer-se de molt diverses maneres. Una d'aquestes fóra, per exemple, la següent, per al cas d'ésser negativa la constant E, que és l'energia total del moviment real. L'equació de forces vives seria

$$\frac{1}{2m} q^2 - \frac{k}{r} = E$$

en la qual fórmula r i q són conegudes en l'instant t , E també, i k ve definida per l'expressió anterior. En resultaria un moviment intermediari amb la mateixa energia total E que el moviment real, però amb diferent valor de la constant d'atracció, que aquí és k en lloc de $f m m_o$. Els elements el·líptics corresponents s'anomenen *isoenergètics*, a diferència dels ordinaris, que poden qualificar-se d'*isodinàmics*. Aquests elements isoenergètics no són regularitzants, però

presenten, en certs casos, determinats aventatges pel fet d'introduir com a variable canònica l'anomalia excèntrica en lloc de l'anomalia mitja, que és la que figura clàssicament entre els isodinàmics, substitució particularment interessant per a alguns tipus de pertorbacions.⁽¹⁾

7. TRANSFORMACIÓ CANÒNICA DEDUIDA DEL MOVIMENT PARABÒLIC. REGULARITZACIÓ D'UN XOC BINARI.

Un moviment fictici que no utilitza elements isoenergètics ni isodinàmics, però que respon al criteri que l'òrbita intermediària sigui *parabòlica*, resulta de definir la constant d'atracció per la fórmula

$$\frac{1}{2m} q^2 - \frac{k}{r} = 0 .$$

La constant de forces vives és nul·la, la qual cosa tradueix la condició característica perquè el moviment central newtonià sigui parabòlic. Admetem, doncs, el valor de k que resulta de la fórmula anterior per als valors r i q del punt P en l'instant t . La paràbola intermediària (que passa per P i és tangent al vector $\underline{q}$ en el punt P) tindrà el focus en O . Sigui p el paràmetre de la paràbola i c la constant d'àrees, és a dir el doble de la velocitat aerolar relativa al moviment hipotètic.

Poden definir-se dos vectors, un Ξ de llargada $\xi = 2km$, dirigit del focus al vèrtex; altre H , paral·lel a $\underline{q}$, de llargada $\pi = \frac{r}{\xi} q$. Siguin ξ_j , π_j les components d'aquests dos vectors.

1. Cfr. *Nuovo Sistema canonico di elementi ellittici*. (Ann. di Mat. Série III, tom. XX. 1913. Pàgs. 153-170. Volum dedicat a la memòria de Lagrange.)

Per abreviar, serà escrit

$$-\frac{1}{2}W = \sum_i^3 \xi_i \pi_i,$$

i així les relacions entre les (x_j, p_j) i les (ξ_j, π_j) poden adoptar la forma

$$(10) \quad \begin{cases} x_j = \pi^2 \xi_j + W \pi_j \\ p_j = \frac{\pi_j}{\pi^2} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Aquestes fórmules defineixen una transformació de contacte, perquè, segons el valor de W , la relació (9) és verificada.

En acostar-se P indefinidament a punt O , la llargada de $\underline{q}$ es fa indefinidament gran. Però el producte $r q^2$ resta finit i diferent de zero.

Havent introduït Ξ com a vector de llargada $2k = \frac{1}{m} r q^2$, podem afirmar que les tres components ξ_1, ξ_2, ξ_3 tendeixen a límits finits i determinats en el moment del xoc. Les π_j , per al mateix instant, són zero, ja que, en acostar-se el xoc, la llargada $\pi = \frac{r q}{\xi}$ tendeix a zero.

I és interessant remarcar que no solament les x_j són, totes, funcions regulars de les ξ_j, π_j als volts d'un xoc, és a dir, per valors zeros de les π_j i valors, no tots nuls, de les ξ_j , sinó que també succeeix el mateix per a

$$(11) \quad \begin{cases} r = \xi \pi^2 \\ r p_j = \xi \pi_j \\ r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi. \end{cases}$$

D'això es dedueix, d'una manera semblant a ço que

hem deixat estatuït per al cas del pla, que la funció característica H^* i, per tant, el sistema diferencial queden regularitzats amb la indicada transformació.

8. PARÀMETRE SIMÈTRIC. REGULARITZACIÓ COMPLETA.

Fins aquí s'ha tractat la regularització d'un xoc binari PO. Consideracions semblants poden ésser repetides per als altres tipus de xocs PP', P'O, adoptant les transformacions corresponents. Per al xoc PO s'ha fet servir no solament la transformació de contacte esmentada, sinó també un canvi de variable independent, de manera que, en lloc de t , s'introduïa la nova variable u definida per a

$$du = \frac{dt}{r}.$$

Observant que el producte

$$rU = fm_0m + \frac{fm_0m'}{r'}r + \frac{fmm'}{\Delta}r,$$

considerat com a funció de les variables transformades ξ_j , π_j , així com de les x' , és regular als volts i fins en el moment del xoc, sense anul·lar-se, es podrà encara substituir a u la nova variable τ definida per

$$(12) \quad d\tau = rUdu$$

sense comprometre per a res la regularització. Aquesta variable nova τ creix constantment amb u i, per tant, amb t , convergint cap a un valor finit per l'instant del xoc $t = t_1$, a la manera mateixa de u .

Entre el nou paràmetre τ i el temps t hi ha la relació

$$(12') \quad d\tau = Udt$$

en la qual apar evident l'estructura de simetria (respecte dels tres cossos) que té τ en front de u . Si en les fórmules (1) es posa τ en lloc de u , i per a simplificar s'escriu

$$F = \frac{1}{rU} H^*$$

o sia per (2)

$$(13) \quad F = \frac{1}{U} (H - E),$$

el sistema (1), en el qual F , de la mateixa manera que H^* , s'entén tenir el valor 0, serà novament:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, & \frac{\partial x_i'}{\partial \tau} = \frac{\partial F}{\partial p_i'} \\ \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, & \frac{\partial p_i'}{\partial \tau} = -\frac{\partial F}{\partial x_i'} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Amb el nou paràmetre simètric τ no cal modificar la variable independent en procedir a la regularització als volts d'un xoc qualsevol binari, i solament cal la transformació de contacte corresponent, junt amb translacions d'origen de O a P o a P' .

Pel teorema de Sundman respecte de l'anul·lació del moment resultant $\mathfrak{M}$ de les quantitats de moviment, queda exclosa l'eventualitat d'un xoc general, i, en conseqüència, resulta demostrat, així, que el sistema (14) és regular o regularitzable amb senzilles transformacions canòniques de les incògnites: regularització vàlida per a qualsevol valor de τ , i això vol dir del temps, tant si hi ha xocs com si no.

9. EN QUIN SENTIT ES POT DIR RESOLT EL PROBLEMA

Les coordenades dels tres cossos o figuren directament entre les incògnites o bé són expressables com a funcions holomorfes d'altres variables que permeten la

regularització, per exemple, per a les primeres fórmules (10). Per tant, *les coordenades dels tres cossos i llurs distàncies mútues així com el temps* (fórmules 12 i 12') *són funcions del paràmetre τ per a tots els valors reals d'aquest*, valors que corresponen biunívocament a tots els valors reals del temps. Aquesta és la conclusió avui ja clàssica de Sundman que tanca tota una categoria de recerques antigues i modernes.

Però si bé la importància del resultat obtingut és molt notable, no es pot negar que la sèrie de polinomis en τ (o altre sèrie semblant), amb els quals es pot representar la solució, té un aspecte àridament quantitatiu, de manera que ni en dóna la manera d'ésser general ni les característiques de major relleu. Fins al punt que, si, per exemple, per $\tau = \tau_1$ hi ha efectivament un xoc, les fórmules que resten vàlides abans del xoc, durant aquest i després, no permeten, sense nova discussió, donar-se'n compte.

10. SIGNIFICAT MECÀNIC DE LA PROLONGACIÓ ANALÍTICA

Les fórmules vàlides per abans o després del xoc poden tenir fins i tot un cert interès astronòmic, encara que les velocitats mitjanes dels cossos sideris siguin bastant superiors a les dels projectils més potents, i sols grosserament comparables els materials.

Mes, en veritat, si es prenen per norma els efectes balístics, pot pensar-se en què el xoc de dos cossos sideris resulti ésser l'aspecte científic d'una catàstrofe: la fi del món, que ha distret llarg temps i distreu encara la fantasia popular. Si el món es fa trossos, el problema del moviment després del xoc presentarà característiques ben diverses de les que són esquematitzables en el problema dels tres cos-

sos i la prolongació analítica serà qualche cosa ben diferent de la realitat.

Però pot fer-se la conjectura, altrament, de què les conseqüències catastròfiques del xoc siguin limitades a les regions en les quals té lloc el contacte, i que l'efecte general sigui un rebot, com succeeix en els cossos perfectament elàstics i en les molècules tals com se les considera en la teoria cinètica dels gasos. Aleshores es pot atribuir un sentit físic perfectament definit al moviment, després del xoc, dels centres de gravetat dels cossos que es topen.

I, en efecte, el professor Armellini⁽¹⁾ ha trobat que a la continuació analítica de Sundman correspon el moviment dels centres de gravetat de dues esferes perfectament elàstiques després del xoc.

Amb això queda justificat i fins imposat per la naturalesa de les coses el criteri analític de fer variar τ incondicionalment de $-\infty$ a $+\infty$, sense deturar-se en xocs eventuals; però són aquests fenòmens tan sobresortints en la història del moviment, que no es pot dir que s'hagin integrat fins a la fi les equacions diferencials del problema si no es pot d'una o altra manera saber a priori, per les condicions inicials donades, si el xoc és de témer o no.

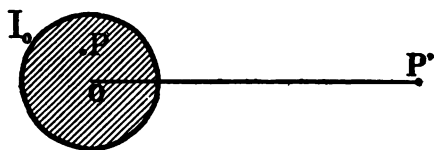
II. PREDICCIÓ A TERMINI BREU. SEGURETAT SECULAR.

Ja s'ha vist com la pregunta sobre quines serien les condicions característiques d'un xoc, porta a l'estudi detingut de la naturalesa de la singularitat corresponent. Obtinguda la regularització local, de manera que als volts

1. *Estensione delle soluzioni del Sundman dal caso di corpi ideali al caso di sferette elastiche omogenee.* (Rend. delle R. Acc. dei Lincei. Vol. XXIV [primo semestre 1913], pàgs. 185-190.)

d'un xoc en un cert entorn D tots els elements integrals del sistema diferencial són holomorfs, la construcció efectiva de les condicions de xoc no presenta cap dificultat, ni de concepte, ni formal, ja que les equacions característiques poden ésser obtingudes amb algorismes uniformement convergents en D .

Però tot resta subordinat a la hipòtesi de trobar-se dins D . Per a fixar l'atenció en el cas més senzill ens referirem al problema restringit, en el qual (tota vegada que O i P' estan a distància invariable tot el temps) l'entorn D es redueix a dos entorns I_0, I' de centres O i P' . Si el punt P es troba dins I_0 podem deduir dels valors de les quantitats que defineixen el seu estat de moviment, si la condició de xoc és verificada o si no ho és.



Si ho és, se sabrà cert que, al cap de cert temps (del qual es pot donar el límit superior) P caurà sobre O .

Si no és verificada, això vol dir que no hi ha perill de xoc *mentre* P no surti fora de I_0 , però pot perfectament succeir que P ixi de I_0 i que hi torni a entrar, satisfent aleshores, ja dintre altra vegada, les condicions de xoc.⁽¹⁾

És una qüestió vital, potser difícil, però no inatacable i certament mereixedora d'estudi, la de previsió del xoc a llarg termini i pel sol examen de les dades inicials. Perquè la qüestió sigui realment vital, potser convé modificar-la lleugerament de manera que quedin respectades les condicions de seguretat asimptòtiques, és a dir, per a un

1. Cfr., per exemple, *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*. (Acta Mat. Tom XXX. 1906. Pàgs. 305-327.)

temps indefinidament llarg. Perquè, encara que el principi del moviment del centre de gravetat sigui cert i rigorós, la llei del dit moviment sols és identificable amb la de tres punts matemàtics que s'atrauen, segons la llei de Newton, amb la condició que les distàncies mútues d'aquests siguin superiors a un cert límit ϵ que depèn de les dimensions i distribució de les masses dels tres cossos reals. La condició de seguretat referida al problema restringit ve caracteritzada, doncs, per les desigualtats

$$OP \geq \epsilon, P'P \geq \epsilon.$$

Per a valors (negatives) prou grans de la constant de forces vives, Hill va descobrir que poden ésser traçats dos ovals, cadascun dels quals comprèn un sol dels centres O, P', i de tal propietat que P roman indefinidament dintre d'un d'ells. El perill de xoc és, així, únic, i la condició de seguretat, en l'oval Ω_0 de centre O, v. g., és representat únicament per la desigualtat

$$OP \geq \epsilon.$$

12. DUBTES CRÍTICS.

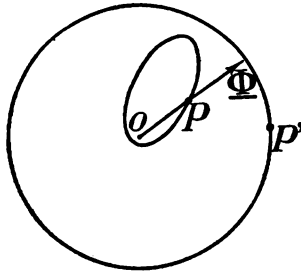
JUSTIFICACIÓ INTUITIVA DE LA SEGURETAT.

Si hom es deixa conduir per l'analogia amb altres problemes de dos graus de llibertat, en particular i per exemple, el moviment d'un punt pesat en una superfície rodona, es presenta tot seguit el dubte que les trajectòries, en no ésser tancades (ja que no es tracti d'òrbites periòdiques) ompliran pràcticament tot el camp Ω_0 . L'adverbi *pràcticament* vol dir la circumstància que, escollit un punt qualsevol M en Ω_0 i un número ϵ tan petit com es vulgui, tota trajectòria acaba en els seus desenrotllaments espirals indefinits per passar a una distància $< \epsilon$ de M.

Si així fos, les condicions de seguretat, encara que es verificuessin, no tindrien cap utilitat astronòmicament. Perquè, per una banda, les dades inicials sols es poden conèixer amb un cert grau d'aproximació (gran, però, limitada), i, per altra, les solucions periòdiques són, respecte de la totalitat de les solucions, una varietat que depèn d'un nombre menor de paràmetres (això en general, i més certament per al problema dels tres cossos). Així és que, per a valors indefinidament pròxims a unes inicials qualssevol, la majoria de les solucions que els corresponen ompliria pràcticament Ω_0 excloent tota seguretat asimptòtica del moviment.

Però tampoc convé abandonar-se massa al pessimisme. És perfectament possible que, segons siguin les dades inicials, les regions envaïdes a Ω_0 siguin diverses; de manera que pugui garantir-se la seguretat mitjançant determinades limitacions de les dades inicials.

La intuïció mecànica sembla donar base a semblant punt de vista (fig. 3).



En efecte : si no hi hagués el centre P' , el punt P descriuria una òrbita el·líptica tota continguda dins Ω_0 . La pertorbació de P' , sempre en el problema restringit, pot ésser calculada en els seus efectes seculars per la manera de Gauss, assimilant P' a un anell circular que materia-

litzés l'òrbita de P' . La força pertorbatriu corresponent Φ (diferència entre l'atracció unitària en P i en O) seria radial per raó de simetria i *adreçada a l'exterior*. L'efecte general hauria d'ésser, doncs, el d'augmentar, mai el de disminuir, la distància mínima de O . Per això, si l'el·lipse no pertorbada satisfà les condicions de seguretat, a partir de les mateixes condicions inicials la seguretat no podria ésser més que major en el problema restringit.

Evidentment sols es tracta de conjectures basades sobre un procediment, clàssic i expressiu, sí, però no rigorós, per al càlcul de les perturbacions seculars. De tota manera, la conclusió és encoratjadora, i per això em sembla convenient recomanar als estudiosos l'examen de la seguretat per exemple, i per començar, en el cas del problema restringit. És la qüestió que es posa *a priori* en la previsió a llarg termini.

Encara que avui la teoria d'Einstein ens porta a considerar la fórmula newtoniana com una primera aproximació, aquesta aproximació és tan gran que un resultat newtonià vàlid per a valors indefinidament grans del temps (ço que hem anomenat *asimptòtic*) té sempre un valor preciós, àdhuc en la nova mecànica.

El que vulgui discutir amb el necessari rigor matemàtic la més senzilla qüestió de seguretat, que és la indicada tot just, podrà mirar d'orientar-se invertint la qüestió, és a dir, estudiant els moviments, les trajectòries dels quals passin a distància $< \epsilon$ de O i examinant quin sigui el camp que envaeixen en la varietat representativa dels estats de moviment. Si en aquesta varietat hi queden buits, aquests són regions de seguretat.

La qüestió ve lligada i subordinada a la prèvia regularització de les equacions del moviment. A la mateixa regularització resten igualment subordinades les modernes recerques que tenen per objecte l'estudi sintètic de la

manera d'ésser de les solucions singulars, de llurs propietats asimptòtiques i estadístiques del conjunt. En aquesta direcció descoberta per Poincaré i per ell mateix vigorosament explorada, s'escauen les recerques notabilíssimes de Birkhoff sobre la distribució de les solucions periòdiques en el problema restringit dels tres cossos.⁽¹⁾

Semblants consideracions poden atribuir-se al cas general, de manera que, si bé és cert que la regularització del problema dels tres cossos no n'és encara la solució completa, no és menys cert que, d'una banda, se'n pot treure un algorisme resolutiu vàlid sense condició a partir de dades inicials qualssevol i per tota la durada del moviment i fins més enllà (Sundman); i, d'altra banda, és una preparació indispensable per a comprendre l'essència íntima del problema, per la qual cosa, si bé amb variades i diverses idees sobre els mitjans aptes per a assolir-ho, des dels temps més reculats fins als moderns, s'ha requerit la intervenció de la Matemàtica en l'estudi dels fenòmens naturals.

1. Cfr. *The restricted problem of three bodies.* (*Rend. del Circolo Mat. di Palermo*. Tom XXXIX. 1915. Pàgs. 265-334.)

CONFERÈNCIA II

LES ONES EN ELS LIQUIDS; PROPAGACIÓ EN ELS CANALS

I. QUÈ ÉS UN MOVIMENT PER ONES?

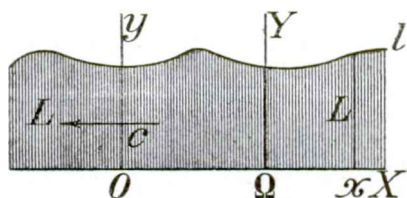
No puc donar una definició general del moviment d'un líquid per ones que, tot compronent els casos en què per una o altra raó siguin aquelles físicament tangibles, assoleixi la deguda precisió matemàtica. M'afiguro que aquest inconvenient deriva de la naturalesa mateixa del fenomen, en el sentit que, si es vol generalitzar cercant d'estendre la consideració a tots els tipus, les característiques de major relleu van esfumant-se, i s'acaba per incloure tots els moviments dinàmicament possibles.

Concretant-se a una orientació, podria qualificar-se de moviment per ones en un fluid aquell en què els desplaçaments de les partícules materials determinen un moviment molt més visible i rellevant d'un cert element característic : per exemple, el d'una superfície lliure o el d'una superfície de separació de dos règims diversos. Però ni això tan sols presenta caràcter netament discriminant, com pot inferir-se d'un exemple clàssic.

Sigui un canal rectilini de fons horitzontal i parets verticals, i consideri's el cas típic en què el moviment del líquid pesant contingut en el canal, vg., aigua, és paral·lel al llarg, essent idèntic per a totes les seccions longitu-

dinals del canal, és a dir, en tots els plans paral·lels al llarg.

El fenomen pot ser estudiat aleshores en dues dimensions, considerant tan sols una secció longitudinal. En ella el fons serà una recta horitzontal ΩX , i el perfil lliure superior serà una línia l , variable, en general, amb el temps, mes no massa diferent d'una recta horitzontal $Y = h$, almenys en condicions ordinàries. Aquesta recta



horitzontal seria la línia de nivell en condicions estàtiques, essent h la profunditat mitja del canal. Sigui L el camp del moviment, és a dir, la faixa indefinida (variable també amb el temps, en general) que queda compresa entre el fons i la línia l .

Amb aquestes suposicions, el problema general de la Hidrodinàmica pels dits moviments plans, pot formular-se així: En l'instant inicial $t = 0$ es dóna la pertorbació, és a dir, la configuració de l i la distribució de les velocitats en L . Es demana la successió del moviment i la llei segons la qual varia l .

Això mateix, salvant especificacions qualitatives, és aplicable al problema general de les ones en canal, anomenant-se propagació per ones la llei que regeix el desenrotllament del moviment a partir d'una pertorbació inicial determinada. En les primeres recerques de Lagrange es troba adoptat aquest punt de vista, que mira directament

a l'integral general, atenent d'una manera incidental a les aplicacions particulars que retreuen el moviment per ones en el sentit comú de la paraula. Lagrange redueix el problema al de l'equació de les cordes vibrants despreciant l'acceleració vertical del moviment de les partícules fluides en front del valor de g (acceleració de la gravetat). L'aplicació més coneguda són les ones de marea. De semblant manera procediren Poisson i Cauchy, els quals abandonen ja la hipòtesi massa restrictiva sobre l'acceleració, i tracten d'una manera general dels petits moviments en canals de molt fons. Les ones s'ofereixen de manera indubtable, mes sense una demarcació sistemàtica on, per la mateixa naturalesa física de la qüestió, no ha de ser possible passar-se'n.

Així s'esdevé, vg., per a les anomenades ones d'emersió que corresponen a la hipòtesi d'un sòlid (un cos flotant, per exemple), que en un moment donat s'elimina, deixant un buit que és aviat reomplert d'aigua. En aquest compliment, que, almenys en teoria, s'inicia instantàniament en tota la massa d'aigua, es formen depressions i inflaments del perfil lliure, que es propaguen al llarg del canal amb acceleració (no velocitat) sensiblement constant. Hi ha, efectivament, qualche cosa que es propaga; mes, encara que sigui un efecte important, no hi ha una llei nítida que ho reguli; llei que, en canvi, es troba en altres tipus no menys importants de moviment per ones.

Entre aquests tipus recordaré senzillament la propagació de discontinuïtats en el cas de fluids compressibles objecte d'estudi per part de Riemann, Hugoniot i Hadamard, i que aquest ha tractat sistemàticament.⁽¹⁾

1. *Leçons sur la propagation des ondes*, París, Hermann, 1903.

2. ONES PROGRESSIVES DE TIPUS PERMANENT. CARÀCTERS ESSENCIALS.

Arribo al cas especial que ha de ser objecte de la nostra atenció. Serà el d'ones progressives de tipus permanent, és a dir, moviments del líquid en el canal en els quals el perfil lliure es trasllada sense alterar la forma amb una velocitat c mentre les partícules materials efectuen petites oscil·lacions amb velocitats locals de valor mig nul, ben lluny d'estar animades de velocitats comparables amb c .

Circumscriu així la noció d'ones de canal, procedirem al seu examen matemàtic.

Introduïrem un sistema d'eixos fixos ΩXY , del qual l'eix ΩY sigui vertical i dirigit en l'aire, l'eix ΩX disposat en el fons δ amb la direcció positiva en sentit oposat al de la translació de l . Junt amb el sistema anterior, serà oportú introduir un segon sistema mòbil amb eixos Oxy solidaris de l i coincidents amb els fixos en l'instant $t = 0$.

Entre les coordenades X, Y , i les x, y , d'un mateix punt, hi ha evidentment les relacions de pas

$$(1) \quad \begin{cases} X = x - ct, \\ Y = y. \end{cases}$$

Siguin u i v les components (segons x, y o x, Y) de la velocitat *relativa*, és a dir, la velocitat referida als eixos mòbils Oxy en el moviment d'una partícula material. Segons la llei del moviment relatiu, les components de la velocitat absoluta seran $u - c$ i v , les quals vindran referides al sistema ΩXY . La circumstància

d'ésser el moviment material insignificant respecte del moviment del perfil lliure es tradueix en què

$$V_a = \sqrt{(u - c)^2 + v^2},$$

que és el valor de la velocitat absoluta, ha de ser una quantitat petita comparada amb c . Des del punt de vista matemàtic això és equivalent a què

$$(2) \quad \beta = \frac{V_a}{c} < 1;$$

o d'altra manera (V_a essent variable), el límit superior d'aquesta relació β per tot el camp i per a tota la durada del moviment ha de ser inferior a la unitat.

I, per conseqüència, $u > 0$ i el límit inferior del valor de u és major que zero.

A priori és desconeguda la línia l , de la qual altra cosa no se sap sinó que no és gaire diferent d'una recta horitzontal, podent, per altra part, tenir una forma sinuosa, regular, etc. També són desconegudes les components u i v . Les condicions quantitatives que han de ser satisfetes (i que defineixen no ja una sola solució, sinó tota una categoria de solucions) són de dues espècies.

I. Cinemàtiques : Incompressibilitat, condicions en el fons i en el perfil lliure.

II. Dinàmiques : Equacions indefinides, valor constant de la pressió en l .

3. ONES TROCOIDALS DE GERSTNER

LLUR INSUFICIÈNCIA COM A PROTOTIPUS DEL FENOMEN REAL.

Més endavant donarem forma explícita a les esmentades condicions després que hàgim circumscrit i precisat

el que ha de ser objecte d'estudi. Entretant, i per justificar aquesta restricció de què parlem, recordaré que per als canals de fondària indefinida⁽¹⁾ és coneguda, fa ja més d'un segle, una solució particular, o, millor, una categoria ∞^1 de solucions particulars, que satisfà exactament les condicions I i II. Són les ones trocoidals de Gerstner i Rankine.⁽²⁾ En elles el perfil lliure l és una trocoide, i les partícules d'aigua descriuen petites el·lipses, que són cada cop més aplanades a mesura que és major la fondària.

Del paràmetre de què depenen aquestes solucions pot disposar-se de manera que la pertorbació sigui més o menys accentuada i pugui convenir tant a les ones més petites com a les més grans onades. Si λ és la llargada de l'ona, és a dir, en el cas actual la distància entre punts homòlegs de la trocoide (pels quals la posició del punt generador ha donat amb el cercle en què es mou una volta completa entorn del centre), hi ha la relació següent:

$$c^2 = \frac{h\lambda}{2\pi};$$

essent g l'acceleració de la gravetat.

Les ones de Gerstner són permanents geomètricament, és a dir, l es trasllada sense alteració, rígidament lligada als eixos mòbils Oxy . També ho són cinemàticament, és a dir, que u i v , considerades amb referència a l'observador mòbil, com a funcions de x , y , t , depenen de x , y , mes no de t , i el moviment té, per tant, caràcter permanent respecte de l'observador.

1. És a dir, que el fons és a l'infinit. En la figura 1, el camp L no tindria altre límit que l , i els orígens Ω i O es trobarien sobre una horitzontal qualsevol.

2. Vegi's, vg., Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III (tercera edició), pàgs. 508-515; o bé Lamb, *Hydrodynamics* (quarta edició), Cambridge, 1916, art. 251.

Per a les ones trocoidals es pot formular de manera precisa la intuïció física fonamental (moviment del perfil sense arrossegada de matèria), que tradueix la desigualtat

$$(2) \quad \beta = \frac{V_a}{c} < 1.$$

El transport global de matèria és, efectivament, nul, o, dit amb altres paraules, és igual a zero el valor mitjà de la massa líquida que passa a través d'una secció determinada del canal.

La solució de Gerstner, posseint tan falagueres prerogatives, mereix certament un lloc d'honor en tots els tractats d'Hidrodinàmica, i fins en les aplicacions hidràuliques i nàutiques se'n fa gran ús com a base de primera aproximació per a apreciar d'una o altra manera les múltiples influències pertorbadores que es presenten en la pràctica. Mes té una condició limitativa, i presenta demés un greu inconvenient, que fa que la importància que li hagi estat atribuïda sols pugui considerar-se provisional a falta de cosa millor.

La limitació és que el fons hagi de trobar-se a il·limitada distància vertical. I l'inconvenient greu, que el moviment és rotacional, o sia en terbolí.

És ben sabut que un líquid perfecte sota l'acció de forces conservadores no pot pendre més que moviments irrotacionals. Perquè es puguin produir ones com les de Gerstner no hi ha més remei que imaginar una acció especial del vent que estableixi un moviment laminar de sentit oposat a la pertorbació i ràpidament esmorteït de la superfície cap avall (Stokes). A partir d'aquest estat de moviment laminar (en què la rotació de les partícules sigui la convenient per a les ones de Gerstner), es pot arribar a les ones trocoidals per l'acció de forces conservadores. Mes això constitueix una generació molt espe-

cial i estranya perquè pugui considerar-se, encara que sigui solament d'una manera aproximada, plausible i aplicable en tots els casos en què s'observen ones propagant-se sense alteració sensible de tipus.

Convé, doncs, cercar altres ones progressives de tipus permanent que, acostant-se en simplicitat a les de Gerstner, siguin degudes a vibracions irrotacionals de les partícules líquides.

4. ONES IRROTACIONALS.

En primera aproximació és possible un tractament bastant senzill. Ho podrem comprovar en deduir les cèlebres ones senzilles d'Airy, com a conseqüència immediata de l'equació funcional que, com tindrà l'honor de demostrar, tradueix de la manera més completa i concisa les condicions del problema per a un canal de fondària qualsevol.

Reprement, mentrestant, les condicions sistemàtiques indicades, referirem les fórmules als eixos mòbils Oxy , respecte dels quals, per hipòtesi, L (camp del moviment relatiu) és constant. Essent el moviment irrotacional, existeix un potencial de velocitats regular dintre L i tal que

$$(3) \quad d\varphi = udx + vdy.$$

Per la condició d'incompressibilitat, φ és harmònica, o sia

$$-vdx + udy$$

és una diferencial exacta. Introduint la funció associada ψ (funció de corrent) mitjançant

$$(4) \quad d\psi = -vdx + udy,$$

vénen definides per (3) i (4) les funcions φ i ψ , salvant la constant arbitrària per a cada una. Aquestes constants seran determinades si admetem $\varphi = \psi = 0$ en el punt O.

Essent el camp L simplement connex, les dues funcions φ i ψ queden així determinades unívocament.

Observi's que l està constituïda sempre per les mateixes partícules, com a línia que és de perfil de l'ona. I, demés, per hipòtesi, és solidària dels eixos Oxy . Per això és, alhora, trajectòria o línia de corrent de totes les partícules que l'integren. En ella, doncs, $\psi = \text{constant}$.

Aquesta mateixa condició val per al fons ($y = 0$), en el qual, ultra ser constant, té el valor zero en virtut d'haver suposat $\psi = 0$ en el punt O.

Sigui q el valor de la constant ψ en l :

$$(5) \quad \psi = q,$$

Si la densitat del líquid es suposa igual a τ , la constant q és l'aiguaflux relatiu del canal; degut, no a un transport real de les partícules, sinó al fet de moure's els eixos de referència amb la velocitat $-c$, amb la qual cosa la velocitat relativa de ço que està en repòs absolut val c . Si $x = \text{constant}$ representa una secció vertical l'aiguaflux o quantitat d'aigua que travessa la dita secció, en la unitat de temps i per a una amplada del canal igual a τ , és

$$\int u dy$$

des del fons a l , al llarg de la vertical $x = \text{const}$. La (4) en què $dx = 0$ demostra que la valor de la integral és, efectivament, q .

És quasi inútil observar que, pel caràcter qualitatiu del moviment per ones, q és certament > 0 , perquè el líquid

té un moviment absolut molt petit, i, per tant, en el moviment relatiu respecte de *Oxy*, la velocitat horitzontal de les partícules no serà molt diversa de *c*.

Convé examinar el caràcter analític de ψ dins *L*. En primer lloc, del fet d'ésser *u* i *v* finites i contínues en el canal (fins allunyant-se'n indefinidament en un sentit o altre) es desprèn que ψ és regular a distància finita (per 3) i al mateix temps harmònica (3 i 4). És també finita en l'infinit; doncs sigui *P* un punt de *L* d'abscissa qualsevol: sempre es pot aconseguir a partir d'un punt *Q* del fons o bé de *l* recorrent un camí finit no més gran que l'ordenada màxima de *l*. Com que ψ_Q és constant, i $\psi_P - \psi_Q = \int (-vdx + udy)$, encara que *P* s'allunyi indefinidament, ψ_P es conserva finita. Demés, essent funció harmònica que pren en el contorn els valors *o* (al fons) i *q* (a *l*), romandrà sempre compresa entre *o* i *q* dins *L*. Una funció així depèn de *x*, *y*, mes no de *t*. I, per tant, també *u* i *v* les components de la velocitat, de manera que el moviment relatiu als eixos *Oxy* té necessàriament caràcter estacionari.

És interessant observar que fins aquí hem admès tan sols que el perfil lliure es trasllada sense canviar de forma. Basta, doncs, això per a deduir-ne que, respecte del perfil lliure, o, millor, respecte d'un sistema *Oxy* d'eixos solidaris del perfil lliure, el moviment és permanent.

És clar que també el potencial de velocitats definit per (3), amb la condició inicial de ser $\varphi = 0$ en *O*, resulta harmònic i funció solament de *x*, *y*. Mes la φ , en canvi, a diferència del que passa amb la ψ , es fa infinita amb *x*, convergint a $+\infty$ o a $-\infty$ segons es consideri el sentit positiu o negatiu.

5. CARACTERÍSTICA DE MASSA.

Per establir aquesta propietat de φ de la manera més senzilla, amb l'avantatge de trobar alhora el terme asimptòtic, traduirem analíticament la característica de massa. D'una manera qualitativa n'havem hagut compte en considerar petita la velocitat absoluta de les partícules comparada amb c .

Expressem que *per a les capes profundes no hi ha transport global mitjà*.

A dir veritat, hom podria ésser temptat de pensar que el veritable moviment per ones no és altra cosa que una apariència, en el sentit de negar tot transport de conjunt, i quedar reduït a oscil·lacions de les partícules al voltant de posicions fixes en l'espai. Mes aquesta definició fora massa restrictiva, i fins en contradicció amb la naturalesa irrotacional del moviment, com va ser indicat ja per Lord Rayleigh amb suggestiu argument, si bé no del tot rigorós.

És, per tant, indicat exigir sols que el petit transport de massa que acompanya la propagació per ones, en cas d'existir, sigui degut exclusivament a les desigualtats superficials : els estrats profunds no hi contribuïrien per a res. Per això considerem com a característica de massa l'absència de transport en les capes profundes.

Sigui dy un element de la vertical en els eixos mòbils Oxy . El flux en el sentit positiu Ox , referit a les unitats de temps i amplada del canal, és

$$udy.$$

Si es tractés d'una vertical fixa en l'espai, caldria substituir u la velocitat absoluta $u - c$. Invertint el

sentit, és a dir, comptant l'aiguaflux absolut positivament en el sentit de la propagació, escriurem:

$$(c - u)dy.$$

En el primer cas la vertical té per equació $x = \text{const.}$; en el segon, X és constant i $x = X + ct$. Sigui com vulgui, l'aiguaflux total resulta integrant respecte a y des del fons fins al perfil lliure l .

Per la (4), al llarg de qualsevol vertical $udy = d\psi$, i, per tant, l'aiguaflux relatiu és q , com ja s'havia establert. L'aiguaflux absolut en el sentit de propagació serà

$$Q = \int (c - u)dy = cy_i - q$$

No cal dir que y_i és l'ordenada del perfil lliure corresponent a la secció considerada.

Serà anomenat *profund* un punt o tros de canal que estigui sempre aigua endins, és a dir, sota la mínima ordenada de la superfície lliure. Si dy és un element de vertical *fixa*, serà anomenada *característica de massa* la circumstància que la quantitat d'aigua m que passa a través de dy durant un interval de temps (t_1, t_2) tan llarg com es vulgui, és sempre finita. La relació entre aquesta quantitat i el temps o interval $t_2 - t_1$, és a dir, el valor mig de l'aiguaflux tendirà a zero en créixer l'esmentat interval sense límit.

Si m és positiu en el sentit de propagació,

$$m = dy \int_{t_1}^{t_2} (c - u) dt \quad (1).$$

1. Observi's com, en atribuir a un element vertical dy l'aiguaflux $dy(c - u)dt$ per a tots els dt de $t_2 - t_1$, es fa ús de la hipòtesis que l'element sigui profund. Si per un cert temps l'element quedés en eixut, fóra necessari substituir zero a $dy(c - u)dt$ per tota la durada d'estar en eixut.

La u sota del signe, per ser referida als eixos mòbils, depèn, com hem vist ja, exclusivament de x , y .

En la integració respecte de t , l'argument x s'ha de considerar substituït per $X + ct$, amb X fix.

Siguin x_1 , x_2 els valors de x que corresponen a t_1 , t_2 (abscisses de la vertical fixa respecte dels eixos mòbils en aquests dos instants). Introduint x en lloc de t com a variable d'integració, i recordant que $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, resulta

$$m = \frac{dy}{c} \left\{ c(x_2 - x_1) - [\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)] \right\}.$$

La circumstància que m ha de romandre finita qualsevol que siguin t_1 , t_2 , i, per tant, x_1 , x_2 , equival a aquesta: Que la funció

$$(6) \quad \Phi(x, y) = \varphi(x, y) - cx$$

es mantingui finita quan x creix indefinidament per tots els valors de y inferiors a l'ordenada mínima de l . I d'aquesta última restricció se'n pot prescindir, quedant en definitiva que $\Phi(x, y)$ *resta finita fins en l'infinit inclusiu, en tot el camp L del moviment*.

Per justificar-ho observi's, com en el cas de $\psi(x, y)$, que un punt qualsevol de L pot ser aconseguit des d'un altre punt profund (allà dèiem des del fons) per un desplaçament vertical finit inferior a l'ordenada màxima del perfil lliure. La diferència entre els valors de Φ en els dos punts no pot excedir el producte de la diferència de nivell pel límit superior de

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = |v|,$$

que és finita.

La (6), essent $\Phi(x, y)$ finita, es manté finita també en l'infinit, i això demostra que φ es fa infinita com cx .

Tinguem present que, en tot el camp L, la velocitat relativa $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ és sempre major que zero, i fins major que una certa constant positiva. Per altra part, si s és l'arc d'una línia de flux o de corrent, comptat positivament en el sentit del moure's l'aigua, la definició de la línia porta a què

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{v}{V}.$$

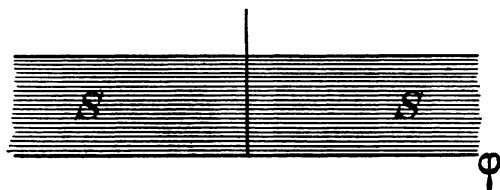
És a dir, al llarg d'una línia de corrent, per la (3),

$$\frac{d\varphi}{ds} = V.$$

Això demostra que φ creix constantment amb s ; mes s (per l'expressió de $\frac{dx}{ds}$, així com per mantenir-se u sempre positiu) creix constantment amb x des de $-\infty$ a $+\infty$. I amb això queda demostrat que, *al llarg de tota línia de corrent, i en particular en el fons i en el perfil l, la φ creix constantment amb x de $-\infty$ a $+\infty$.*

6. CONSEQÜÈNCIES ANALÍTIQUES. PLA f .

Resulta del que queda establert fins ara que, si en un pla i amb coordenades cartesianes φ , ψ es representen



les valors de φ i ψ en el camp de moviment L, aquestes valors es trobaran en la faixa S compresa entre les rectes

$\psi = o$ i $\psi = q$. Això no diu encara que entre el punt x, y de L i el punt φ, ψ de S hi hagi correspondència biunívoca, és a dir, de tots els punts de L a tots els de S i cada un una sola vegada. Però és fàcil veure que així és, efectivament, referint-se a les (3) i (4), així com a una proposició general de la representació conforme.

Posant

$$(7) \quad \begin{cases} x + iy = z \\ \varphi + i\psi = f, \\ u - iv = w, \end{cases}$$

les (3) i (4) queden compendiades en la

$$(8) \quad df = wdz,$$

amb la qual cosa queda demostrat que f és una funció monògena de la variable complexa z , la derivada de la qual és la funció, també monògena, w . Aquesta, pel que s'ha dit a propòsit de u i v , és regular en el camp L del pla xy , o sia de z , essent finit fins en l'infinit.

Demés,

$$|w|^2 = u^2 + v^2 = V^2$$

no baixa mai sota d'un cert límit inferior > 0 .

Com que $\left| \frac{df}{dz} \right| = |w|$ frueix de la mateixa propietat,

i entre els contorns de les dues faixes L, S (fons i l en el pla $z, \psi = o, \psi = q$ en el pla f) hi ha correspondència biunívoca, segons les al·legades proposicions hi ha correspondència biunívoca i conforme entre L i S . Amb això, tota funció de la variable complexa z , uniforme i regular en el camp L del moviment, es pot del mateix mode considerar com funció de f , uniforme i regular en S . Adoptant aquest punt de vista fixarem des d'ara en endà-

vant l'atenció en la funció $w(f) = u - iv$; ella és finita en l'infinit, en S, perquè ho era en L; és real en l'eix real $\psi = 0$, perquè en el fons $v = 0$. Si fos coneguda $w(f)$, la resolució completa del problema hidrodinàmic sota la forma euleriana, és a dir, el coneixement de $w(z)$, resultaria d'una sola quadratura seguida d'eliminació.

En efecte, la (8) escrita en altre forma, dóna

$$dz = \frac{df}{w},$$

determinant $z(f)$ amb una quadratura, i podent-se fixar la constant per ser $z = 0$ per $f = 0$. Invertint i substituint es té $w(z)$.

El canvi de variable independent de z a f és aconsellable perquè la forma del camp L de variabilitat de la z no és determinada *a priori*, sinó que depèn de la línia lliure l , mentre que el camp S de f és una faixa de vores rectes compresa entre l'eix real $\psi = 0$ i la paral·lela $\psi = q$ en el semiplà positiu.

Observi's que, si

$$(9) \quad F = f - cz$$

i z es considera funció de f , l'expressió anterior defineix una funció de la variable complexa f , regular en S (per ser-ho f i z); mes, a diferència de f i z , finita en l'infinit. Per provar-ho examinarem per separat la part real i el coeficient de la part imaginària, que són, respectivament, $\varphi - cx$, que és la funció Φ definida per (6), i $\Psi = \psi - cy$. La Φ sabem que es conserva finita, com a funció dels punts x, y de L fins en punts a l'infinit. El mateix pot dir-se de Ψ perquè ψ i y són finites dins L. Passant de L a S queda demostrada la proposició.

7. RELACIÓ GLOBAL.

EXISTÈNCIA NECESSÀRIA D'UN TRANSPORT SUPERFICIAL.

Tenim ja ara recollides les dades cinemàtiques, i sintetitzades a posta en escasses premisses de la teoria de funcions analítiques. Abans d'examinar la part dinàmica arribant en definitiva a l'equació funcional, que és el nervi de la qüestió, em permetré assenyalar encara algunes conseqüències de la hipòtesi. Faci's referència a l'expressió del flux a través d'una secció fixa del canal durant un interval $t_1, - t_2$.

L'aiguaflux per unitat de temps Q és, com se sap,

$$Q = \int_0^{y_1} (c - u) dy = cy_1 - q;$$

en què y_1 és l'ordenada del perfil lliure. Multiplicant per dt , i integrant entre les valors extremes de l'interval, resultarà el flux total M . Observi's que Q (de la mateixa manera que u i dy) depèn de t solament per $x = X + ct$, per ço que, fent ús de la mateixa transformació que en l'examen del cas d'un element profund, tindrem

$$M = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{y_1} (c - u) dy = \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx - \frac{q}{c} (x_2 - x_1).$$

La primera expressió de M , anomenant L' la porció del camp L compresa entre x_1 i x_2 , i posant $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en lloc de u , es pot escriure en la forma

$$(10) \quad M = \int_{L'} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dL.$$

Fixant-nos ara en la correspondència biunívoca entre les dues faixes L i S , diem S' a la part de S que correspon a L' , i observem que la correspondència estableix una representació conforme entre els dos camps, el mòdul dels quals és $\left| \frac{dz}{df} \right|$ (relació entre un element $|dz|$ i el corresponent $|df|$).

Si dL i dS són dues àrees corresponents, se tindrà

$$dL = \left| \frac{dz}{df} \right|^2 dS,$$

en la que z es pot considerar funció de f o viceversa segons (9). S'entendrà sempre que F va expressada en funció de f , inclús en la (9), en el cas de considerar-se z funció de f . Viceversa, en cas de considerar-se f com a funció de z , la F se suposarà com funció de z .

De la identitat

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{df}},$$

i en virtut de les dues primeres (7), es dedueix, igualant les parts reals,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{1}{\left| \frac{dz}{df} \right|^2}.$$

Així, la (10), adoptant com a variables d'integració φ i ψ en lloc de x i y , es fa

$$(10') \quad M = \int_{S'} \left\{ \left| \frac{dz}{df} \right|^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right\} dS.$$

De (9), atesa la monogeneïtat de

$$F(f) = F(\varphi + i\psi) = \Phi + i\Psi,$$

resulta

$$(9') \quad \frac{dz}{df} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \frac{dF}{df} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{i}{c} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \varphi};$$

i de on:

$$\left| \frac{dz}{df} \right|^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{c^2} \left| \frac{dF}{df} \right|^2.$$

Considerant F com a funció de f per intermedi de z ,
i observant que per (9) i (8)

$$\frac{dF}{dz} = \frac{df}{dz} - c = w - c,$$

i recordant que ha estat designada per β la fracció
 $\frac{V_a}{c} = \frac{|w - c|}{c}$, podrà escriure's

$$\left| \frac{dz}{df} \right|^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \beta^2 \left| \frac{dz}{df} \right|^2.$$

La (9'), igualant les parts reals d'ambdós membres,
dóna

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

i, per tant, l'anterior podrà escriure's

$$\left| \frac{dz}{df} \right|^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \beta^2 \left| \frac{dz}{df} \right|^2;$$

i la (10'), posant-hi

$$N = \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} dS,$$

adopta la forma definitiva

$$(10'') \quad M = \int_{L'} \beta^2 dL + N.$$

Observi's que el sumand N es manté finit fins quan L' creix indefinidament. En efecte, el camp S' del pla f



ve limitat per les dues paral·leles $\psi = 0$ i $\psi = q$, i per les dues línies transversals σ_1 , σ_2 , que són les imatges de les verticals $x = x_1$, i $x = x_2$ del pla z . Ara bé: si σ' és el contorn sencer de S' i $d\sigma'$ un element seu, n la direcció de la normal interna a S' , aplicant a la definició de N el lema de Green, resulta

$$N = \frac{1}{c^2} \int_{\sigma'} \Phi \cos (\hat{n}, \varphi) d\sigma'.$$

Mes en les paral·leles $\psi = 0$, $\psi = q$, $\cos(\hat{n}, \varphi)$ s'anul·la quedant

$$N = \frac{1}{c^2} \int_{\sigma_1 + \sigma_2} \Phi \cos (\hat{n}, \varphi) d\sigma'.$$

L'element $d\sigma'$ d'una de les transversals, i l'element dy de la vertical corresponent, estan entre si en la relació $\left| \frac{df}{dz} \right|$ essencialment finita (igual a la velocitat relativa

$|w| = V$). De la mateixa manera és finita Φ (n.º 5). Si P és, doncs, el producte de l'ordenada màxima de l pel límit superior del mòdul de Φw en tot el camp del moviment, resulta (referint l'integral al pla de la z),

$$N \leq \frac{zP}{c^2} .$$

Així queda demostrat que N és finita de qualsevol manera que s'engrandeixi L' , o, si es vol, l'interval t_1, t_2 .

Reprement ja la (10"), el primer membre és essencialment positiu, i en general creix indefinidament amb L' (per exemple sempre que $w(z)$ sigui funció periòdica). D'això deriva l'interès de la transformació efectuada que permet afirmar que les ones irrotacionals de tipus permanent, en general, i necessàriament les periòdiques, vénen acompanyades d'un transport global en el sentit de la propagació; transport degut exclusivament a les capes superficials, mentre que per les capes profundes hi ha la característica de massa. Aquesta circumstància depèn de β^2 (vegi's la 10). I per això no pot concloure's de les teories que operen amb la primera aproximació, despreciant els termes de segon ordre en β . Aquest és, precisament, el cas de les ones d'Airy. El primer d'adonar-se, d'una manera quasi experimental, que la segona aproximació per les ones periòdiques porta en si un transport va ser Stokes.

La concomitància del caràcter irrotacional i del transport va ser intuït i enunciat per Lord Rayleigh, com se n'ha fet esment abans d'ara. Mes una demostració matemàtica satisfactòria sembla requerir les especificacions que ens han conduït a la (10"). D'aquesta equació se'n treu una relació interessant entre elements

globals, substituint-hi M per l , segona de les expressions indicades inicialment. Dividint-la per $x_2 - x_1$,

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{L'} \beta^2 dL + \frac{N}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx - \frac{q}{c}.$$

Entre les hipòtesis que s'han fet al començament figura la de no ésser l molt diversa d'una recta horitzontal $y = h$ (h altura del perfil lliure abans de pertorbació). A la dita hipòtesi atribuirem encara un significat asimptòtic, admetent que el nivell mitjà entre dues seccions, o sia el valor mitjà de l'ordenada y_1

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx,$$

relatiu a un tros qualsevol de canal, convergeix cap a h en créixer la llargada del tros. Si es tracta d'ones periòdiques, estarà sempre satisfeta, el valor mitjà asimptòtic coincideix amb el valor mitjà corresponent a una ona donada, és a dir, essent h la llargada de l'ona, amb

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda y_1 dx.$$

La hipòtesi de l'existència d'un nivell mitjà que he volgut enunciar a causa de rigor matemàtica, és molt plausible físicament, és una característica intuïtiva del moviment per ones.

Havent establert ço que precedeix, considerem encara l'última equació observant que $\frac{N}{x_2 - x_1}$ i el segon membre convergeixen, respectivament, cap als límits 0 i $h - \frac{q}{c}$

quan l'interval $x_2 - x_1$ creix sense límit. Per tant,

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{L'} \beta^2 dL$$

té per límit $h - \frac{q}{c}$, o sia, recordant que $\beta^2 = \frac{V_a^2}{c^2}$ i multiplicant per $\frac{1}{2} c^2$,

$$\lim. \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{2} \int_{L'} V_a^2 dL = \frac{1}{2} c^2 \left(h - \frac{q}{c} \right).$$

Ara bé: $\frac{1}{2} \int_{L'} V_a^2 dL$ representa l'energia cinètica de moviment per ones, energia localitzada en L' (per unitat d'amplada del canal). L'equació que acabem d'obtenir mostra que hi ha un valor mitjà asimptòtic τ per a l'energia del moviment per ones, per unitat de llargada i ample del canal i tal que

$$(II) \quad \tau = \frac{1}{2} c^2 \left(h - \frac{q}{c} \right).$$

Això és una relació notable entre els elements globals, la qual, en primera aproximació (β^2 despreciable), es redueix a

$$h = \frac{q}{c},$$

que, considerada exacta, portaria a la no existència de transport, com es reconeix immediatament del fet de ser q l'aiguaflex relatiu, que, si fos atribuïble a la translocació dels eixos tan solament, valdria ch .

8. EXPRESSIÓ DE LA VELOCITAT MITJANA DE TRANSPORT.

Val la pena de remarcar com $\frac{\tau}{h} = \tau'$ representa el valor mitjà de la densitat d'energia cinètica (energia per unitat de llarg, ample i fons). Per altra part, $\frac{q}{h}$ té un significat global bastant expressiu. És la velocitat segons la qual *sembla* efectuar-se el transport per a l'observador mòbil. Si el transport fos rigurosament nul, hauria de ser $q = ch$. La diferència $\frac{q}{h} - c$ representa la velocitat absoluta del transport material en el sentit positiu Ox : per això l'oposada $c - \frac{q}{h} = \gamma$ *mesura precisament la velocitat mitjana del transport global en sentit de la propagació per ones*.

Dividint els dos nombres de la (II) per $\frac{1}{2} c^2 h$, resulta

$$(II') \quad \frac{\gamma}{c} = \frac{\tau'}{\frac{1}{2} c^2}$$

que no és menys expressiva que la precedent, i que té l'aventatge de romandre vàlida sense modificació, fins i tot per a canals de profunditat infinita.

9. CONDICIONS DINÀMIQUES.

EQUACIÓ FUNCIONAL CARACTERÍSTICA.

Plantejarem, finalment, les condicions que deriven de les lleis de la Mecànica, referint-les als eixos Oxy , que,

per estar animats de moviment uniforme, poden ser tractats com a fixos.

Quan les forces són conservadores, les equacions indefinides de la Hidrodinàmica es redueixen a una relació única. Per als líquids en moviment estacionari, és una relació que lliga la velocitat V , el potencial U de les forces i la pressió p . En el cas que considerem, en el qual la densitat és 1, i el potencial $-gy + \text{const} = -g(y-h)$, essent h el nivell mitjà, la referida equació és

$$(12) \quad \frac{1}{2} V^2 + g(y-h) + p = \text{const},$$

que ha de ser satisfeta en tot punt del camp L del moviment. Pels punts interiors, en què p no és donada a priori, l'equació defineix p ; viceversa, en el perfil lliure l , la pressió p és p_0 , és el valor de la pressió atmosfèrica. i la (12) formula una condició al límit, la condició al límit característica del problema:

$$(13) \quad \frac{1}{2} V^2 + g(y_l - h) = \text{const}, \quad \text{en } l.$$

Sigui f sempre la variable independent per les raons conegudes, la z , o, millor, la w , serà la funció incògnita. La w representa (vectorialment) la velocitat relativa. En el fons ($y=0$, o bé en S , $\psi=0$), la velocitat és horitzontal, i $w = u - iv$ és real, com $z(f)$, per f real.

Aplicant el principi de simetria o de reflexió analítica de Schwarz les funcions així definides, w i z , seran prolongables analíticament sota l'eix real en la faixa S' , imatge especular de S respecte a l'eix de les φ , nova faixa limitada per les rectes $\psi=0$, $\psi=-\varphi$, en la qual les funcions assumiran valors conjugats dels que tenen en S .

O, més precisament, en punts simètrics $\varphi + i\psi$, $\varphi - i\psi$, les z i w tenen valors conjugats. Per tant, els

coeficients de la part imaginària y de z , i el mòdul $|w|$ de w en un punt $\varphi + i\psi$ de S o de S' , són expressables en la forma:

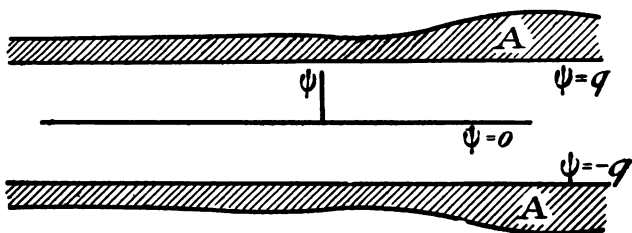
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2i} \{ z(\varphi + i\psi) - z(\varphi - i\psi) \}, \\ V^2 = |w|^2 = w(\varphi + i\psi) \overline{w(\varphi - i\psi)}. \end{cases}$$

En el perfil lliure, $\psi = q$, i la (13) es pot escriure:

$$(13') \quad \{w(\varphi + iq) \overline{w(\varphi - iq)}\} - iq \{z(\varphi + iq) - \overline{z(\varphi - iq)}\} = \text{const.}$$

Convé ara fer intervenir la consideració essencial de tractar-se de funcions analítiques. Les relacions que hem obtingut per a φ real continuen subsistint en tot el camp d'existència de les funcions z , w , que és el mateix per a totes dues.⁽¹⁾ Per tant, es pot escriure f en lloc de φ .

1. Respecte del camp de validesa de l'equació funcional de què es tracta, és d'observar que, si f és un determinat argument del camp, sense sortir-se'n ha de ser possible canviar f en $f + iq$. L'eix real $\psi = 0$ verifica, certament, aquesta condició, i, per a tots els punts que hi pertanyen, la (13') val. Demés, és suficient que el perfil lliure sigui una línia analítica (o constituïda per segments analítics) perquè $z(f)$, que dóna la representació conforme del pla del moviment en S , sigui prolongable analíticament fora de S més enllà de la recta $\psi = q$ (i, per reflexió, més enllà de la seva imatge $\psi = -q$).



Anomenats A i A' aquests camps addicionals, la validesa de l'equació funcional (E) resta assegurada en zones congruents a A i A' i esteses al llarg de l'eix real.

Derivant respecte a f , s'elimina la constant del segon membre, i, substituint $\frac{1}{w}$ a $\frac{dz}{df}$ s'obté:

$$(E) \quad \frac{d}{df} \{ w(f + iq) w(f - iq) \} - ig \left\{ \frac{1}{w(f + iq)} - \frac{1}{w(f - iq)} \right\} = 0.$$

És una equació mixta (diferencial i a diferències finites) que dona $w(f)$ i sintetitza el problema del moviment permanent per ones. Tot queda reduït a la determinació d'integrals $w(f)$ de (E), reals en l'eix real, regulars en $\psi = q$, $\psi = -q$, finits àdhuc a l'infinit, i tals que la característica de massa quedi satisfeta; i això implica dues coses : 1.ª, que $\frac{w - c}{c}$ sigui de mòdul inferior a una fracció pròpia; 2.ª, que $f - cz$, o sia $f - c \int \frac{df}{w}$, es conservi finita àdhuc a l'infinit.

És fàcil comprovar com, de tot integral $w(f)$ així condicionat, s'obté, en efecte, un moviment per ones de tipus permanent, dotat de tots els requisits que hem anat enumerant. Ometo, per ser curt, aquesta verificació, la qual es troba desenrotllada en la nota *Sulle onde progressive di tipo permanente*.⁽¹⁾

Solament indicaré una propietat invariant de (E), i és que roman inalterada quan f es canvia per $-f$. De més precisa manera, si es posa

$$w_1(f) = w(-f)$$

i si en (E) f es canvia en $-f$, resulta la mateixa (E) per a w_1 .

1. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XVI, segon sem. 1907.

10. ONES PERIÒDIQUES.

FORMA CORRESPONENT DE L'EQUACIÓ FUNCIONAL.

Ha estat admès que l , el perfil lliure, és una línia poc diversa de l'horitzontal $y = h$: tant el cas d'ones periòdiques, constituïdes per trams que es succeeixen periòdicament, com el d'ones aperiòdiques, ja amb infinites sinuositats que s'amortitzen asimptòticament, ja amb un nombre discret de depressions o inflaments, queden compreses en el tractament general. Un exemple d'aquests últims és l'ona anomenada *solitària*, estudiada experimentalment per Scott-Russel, i teòricament, de manera aproximada, per Boussinesq i Lord Rayleigh.

Ens ocuparem de les ones periòdiques, anomenades oscil·latòries. Ço que les distingeix entre les ones permanents generals és la circumstància que, respecte de l'observador solidari de l , en recórrer un segment λ anomenat llargada d'ona i disposat en la direcció Ox , tant les característiques geomètriques com les cinemàtiques es reproduïxen idènticament. I això equival a dir que $u(x, y)$, $v(x, y)$ són funcions periòdiques de x de període λ , o, en altra forma, que

$$w(z + \lambda) = w(z) .$$

Essent $df = w(z)dz$, i w funció periòdica, quan z incrementa de λ , $f(z)$ incrementa en una constant, vgr., ω . Partint d'un valor real de z , i tenint present que f i w són reals en l'eix real, és fàcil veure que ω és real i positiu com λ . I això equival a dir, recordant la correspondència entre el pla z i el pla f , que, a una translació d'amplitud λ en el primer, correspon una translació d'amplitud ω en el segon, una i altra en el sentit positiu de l'eix d'abscisses.

Una funció de z que quedi invariant per tal translació, és a dir, que admeti el període real λ , es transforma quan s'expressa per intermèdi de f en una funció periòdica de f amb període real ω , i recíprocament.

La funció (9)

$$F(f) = f - cz$$

és periòdica perquè $F(f)$ és finita dins S (fins a l'infinít).

En efecte, $\frac{dF}{df} = 1 - c \frac{dz}{df} = 1 - \frac{c}{w}$ és periòdica, i, per tant, quan f incrementa d'un període, F incrementa d'una constant K :

$$F(f + nw) = F(f) + nK \quad (n \text{ enter}).$$

Si $K \neq 0$, F no podria ser finit per tot valor dins S . Per tant $K = 0$ o sia F és periòdica. Amb això, la equació (9), igualant els increments dels dos membres, dóna

$$\omega = c\lambda.$$

Aquest és el període de l'argument f .

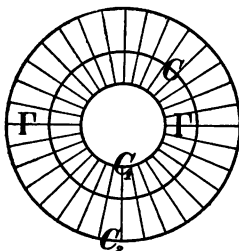
Posant

$$(14) \quad \zeta = e^{\frac{2\pi if}{c\lambda}},$$

l'eix real del pla f es transforma en la circumferència C de raig 1 ($|\zeta| = 1$) del pla ζ , i la faixa S, S' limitada per les rectes $\psi = \pm q$, en la corona circular Γ limitada per les dues circumferències C_1, C_2 de raigs

$$R_1 = e^{-\frac{2\pi q}{c\lambda}} \quad R_2 = e^{\frac{2\pi q}{c\lambda}},$$

menor el primer, i major el segon, que la unitat, així com recíprocs l'un de l'altre.



Quan l'argument f incrementa en $\pm iq$, la ζ ve multiplicada per $e^{\mp\alpha}$ havent escrit

$$(15) \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{q}{c}.$$

És sabut que tota funció $w(f)$, regular en la faixa $\psi = \pm q$ i periòdica de període $c\lambda$, en virtut de (14) es converteix en funció de la nova variable ζ , uniforme en la corona. Com que

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\pi i}{c\lambda} df,$$

l'equació funcional (E) es converteix en

$$(E') \quad \zeta \frac{d}{d\zeta} \left\{ w(e^{-\alpha}\zeta) w(e^{\alpha}\zeta) \right\} - \frac{g\lambda}{2\pi} c \left\{ \frac{1}{w(e^{-\alpha}\zeta)} - \frac{1}{w(e^{\alpha}\zeta)} \right\} = 0.$$

La condició de ser w real en l'eix real, a què ha de satisfer w com a funció de f , es transforma en què : $w(\zeta)$ ha de ser real en la circumferència $C(|\zeta| = 1)$; i la propietat invariant de la (E) pel canvi de f en $-f$ dóna lloc a propietat anàloga per (E') pel canvi de ζ en $\frac{1}{\zeta}$.

II. PRIMERA APROXIMACIÓ. ONES SENZILLES.

L'equació (E') es presta bastant bé a la recerca de solucions aproximades en la hipòtesi que la pertorbació per ones, o, més precisament, la velocitat absoluta $|w-c|$, sigui molt petita al costat de la velocitat de propagació c .

En tal cas convé posar

$$w = c (1 + \varepsilon)$$

o

$$\varepsilon = \frac{w - c}{c},$$

essent ε de primer ordre. (La ε és un nombre pur, funció complexa de f , o, si es vol, de ζ .) De conformitat amb això,

$$w(e^{-\alpha\zeta}) w(e^{\alpha\zeta}) = c^2 \left\{ 1 + \varepsilon(e^{-\alpha\zeta}) + \varepsilon(e^{\alpha\zeta}) \right\}$$

$$\frac{1}{w(e^{-\alpha\zeta})} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - \varepsilon(e^{-\alpha\zeta}) \right\}.$$

La (E') es fa lineal en ε amb la forma

$$(16) \quad c^2 \zeta \frac{d}{d\zeta} \left\{ \varepsilon(e^{\alpha\zeta}) + \varepsilon(e^{-\alpha\zeta}) \right\} - \frac{g\lambda}{2\pi} \left\{ \varepsilon(e^{\alpha\zeta}) - \varepsilon(e^{-\alpha\zeta}) \right\} = 0.$$

Aquesta equació aproximada conserva la propietat invariant de la (E') de romandre sense alteració en canviar

ζ per $\frac{1}{\zeta}$. Aquesta és una observació important, perquè

permet satisfer fàcilment a la condició imposada a w , i, per tant, a ε , de ser real per $|\zeta| = 1$. Suposem, en efecte, que s'ha trobat una $\varepsilon(\zeta)$ que verifica totes les altres condicions. Serà desenrotllable dins Γ en sèrie de Laurent.

En la hipòtesi que els coeficients del desenrotllament siguin tots reals (circumstància suggerida de la mateixa natura de la cosa, ja que tot és real en (16)), el conjugat de $\varepsilon(\zeta)$ per $|\zeta| = 1$ no és altre que $\varepsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. I per això, $\varepsilon(\zeta) + \varepsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ constitueix una nova solució de la (16) real en la circumferència $|\zeta| = 1$.

Provarem de satisfer a (16) amb $\varepsilon(\zeta)$ funció lineal de ζ sense terme constant, vgr., ab $\varepsilon = -\frac{\Gamma}{2} \mu \zeta$ essent μ una constant real prou petita. S'arriba a l'equació numèrica

$$(17) \quad c^2(e^\alpha + e^{-\alpha}) - \frac{g\lambda}{2\pi} (e^\alpha - e^{-\alpha}) = 0,$$

que relaciona entre elles c , λ i α .

12. EQUACIÓ D'AIRY.

L'equació anterior, és l'equació clàssica d'Airy, que defineix la velocitat de propagació c en funció de λ (llargada d'ona) i h (profunditat del canal). En efecte, recordem que, com a conseqüència d'una relació general entre elements globals, hem reconegut que, en primera aproximació (i tal és el tractament actual),

$$q = ch.$$

Així, l'expressió (15) de α es fa

$$(15') \quad \alpha = \frac{2\pi h}{\lambda},$$

i la (17) pot escriure's

$$(17') \quad \frac{c^2}{gh} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Tgh} \alpha \quad (1),$$

que és l'equació d'Airy en la forma ordinària.

Com sigui que el segon membre disminueix constantment en créixer $\alpha^{(2)}$ a partir del valor 1 per a $\alpha = 0$, la (17'), en virtut de la (15'), expressa que *la velocitat de propagació augmenta amb la llargada d'ona λ , essent el límit superior de c^2 (per $\alpha = 0$, o sia $\lambda = \infty$) el valor gh .*

Aquest valor límit és pràcticament vàlid sempre que pugui despreciar-se α^2 , per tant, en virtut de la (15'), per a totes les ones llargues tals que λ sigui molt gran respecte de la profunditat del canal, v. gr., 20 vegades, amb la qual cosa, per la (15'), $\alpha^2 < \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 < \frac{1}{10}$ poden-se'n prescindir en apreciacions grolleres, i fins sense tals reserves per $\lambda > 70h$, i, així, $\alpha^2 < \frac{1}{100}$

Força llargues són, en general, les ones de marea, i el valor corresponent $\sqrt{gh}$ per a la velocitat de propagació coincideix amb la valor ja trobada per Lagrange en la

1. Amb $\operatorname{Tgh} \alpha$ es designa la tangent hiperbòlica de α , o sia: $\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}$. De la mateixa manera, $\operatorname{Ch} \alpha$ i $\operatorname{Sh} \alpha$ designaran el cossinus i sinus hiperbòlics.

2. En efecte, la seva derivada és $-\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{Tgh} \alpha + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2 \operatorname{Ch}^2 \alpha} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Sh} 2\alpha - \alpha \right\}$, i la quantitat entre parèntesis és sempre positiva per α positiva, com es prova, per exemple, substituint a $\frac{1}{2} \operatorname{Sh} 2\alpha = \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{4}$ el desenrotllament en sèrie de potències de α : $\frac{1}{2} \left\{ 2\alpha + \frac{1}{3!} (2\alpha)^3 + \frac{1}{5!} (2\alpha)^5 + \dots \right\}$.

teoria més imperfecta, en la qual es desprecia l'acceleració vertical de les partícules.

Si, pel contrari, α és gran, $Tgh \cdot \alpha$ té el valor asimptòtic 1. La (15') ens diu que és suficient que λ no excedeixi el doble de la profunditat perquè $Tgh \cdot \alpha$ estigui comprès entre $\frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}}$ i 1, i, per tant, sigui confusible amb la unitat.

Resulta així, per a ones curtes (i pràcticament ho són aquelles en què la llargada no excedeix el doble de la fondària),

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1}{\alpha},$$

o sia

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

13. VALOR EXPLÍCIT DELS DIVERSOS ELEMENTS DEL MOVIMENT.

Examinarem amb més detenció el moviment per ones oscil·latòries corresponent a la solució senzilla

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\mu\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right),$$

essent ε una constant positiva (petita, però arbitrària).

Amb aquesta forma sabem ja que ε apleix les condicions volgudes. En primer lloc, reprentem la variable independent f per la (14), i tornant a introduir w ,

$$(18) \quad w(f) = c\left(1 - \mu \cos \frac{2\pi f}{c\lambda}\right).$$

Com que la hipòtesi de ser ϵ de primer ordre fa que també ho sigui μ , es dedueix de l'anterior que

$$(18') \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{c} \left(1 + \mu \cos \frac{2\pi f}{c\lambda} \right);$$

i, per tant, essent $dz = \frac{df}{w}$, amb la condició $z = 0$ per a $f = 0$,

$$(19) \quad z = \frac{f}{c} + \mu \frac{\lambda}{2\pi} \sin \frac{2\pi f}{c\lambda}.$$

Com que z difereix de $\frac{f}{c}$ sols en quantitats de primer ordre, en el segon terme (que ja ho és de primer) podrà ser substituïda z per $\frac{f}{c}$, i aleshores tindrem f en funció de z :

$$(19') \quad f = c \left\{ z - \frac{\mu\lambda}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \right\}.$$

L'equació paramètrica del perfil lliure $\psi = q = ch$ surt de la (19) posant $f = \varphi + ich$, essent φ real. Amb aquesta substitució, separant la part real de la imaginària, i recordant la (15), s'obté

$$x = \frac{\varphi}{c} + \mu \frac{\lambda}{2\pi} \text{Ch.}\alpha \sin \frac{2\pi\varphi}{c\lambda}$$

$$y = h + \mu \frac{\lambda}{2\pi} \text{Sh.}\alpha \cos \frac{2\pi\varphi}{c\lambda}.$$

La primera indica que x difereix de $\frac{\varphi}{c}$ en quantitat de primer ordre: per tant, en la segona (en la qual $\frac{\varphi}{c}$ figura ja en termes que són de primer ordre) es pot posar

x en lloc de $\frac{\varphi}{c}$, resultant l'equació cartesiana del perfil lliure en forma de sinusoide

$$y = h + a \cos \frac{2\pi x}{\lambda},$$

en la qual la constant

$$a = \mu \frac{\lambda}{2\pi} \text{Sh.}\alpha$$

(quantitat petita, però arbitrària a priori, com la μ) representa l'*altura* de les ones.

Recordant l'expressió (15') de α , pot donar-se per a l'altura la definició

$$(20) \quad a = \mu h \frac{1}{\alpha} \text{Sh.}\alpha.$$

14. OBSERVACIÓ RESPECTE DEL CàLCUL DE τ' . VALOR DE LA VELOCITAT DE TRANSPORT.

En l'estudi d'aquestes solucions s'ha despreciat sistemàticament els termes de segon ordre, considerant $\frac{w-c}{c}$ com a quantitat de primer ordre.

L'energia cinètica localitzada en un element dL del canal és

$$\frac{1}{2} c^2 \left| \frac{w-c}{c} \right|^2 dL.$$

La part principal és de segon ordre sempre que la relació $\frac{w-c}{c}$ ho sigui de primer; més és interessant ob-

servar que basten els termes de primer ordre en una solució determinada per al càlcul dels termes de segon ordre en la valor de l'energia cinètica. I, per tant, la relació global rigorosa

$$(II') \quad \frac{\gamma}{c} = \frac{\tau'}{\frac{1}{2}c^2},$$

en la qual τ' és la densitat mitjana de l'energia, ens permet calcular amb la mateixa exactitud (segon ordre inclús) la velocitat de transport γ de les ones sinusoidals.

En tot el curs del càlcul de τ' seran admeses les simplificacions de la primera aproximació, perquè tot terme de τ' és ja de segon ordre, i els errors eventuals resultaran així d'ordre superior.

En aquesta intel·ligència calcularem $\tau' = \frac{\tau}{h}$ partint de l'expressió de l'energia elemental per unitat d'amplada del canal:

$$\frac{1}{2} \left| w - c \right|^2 dL.$$

Per ser $w = \frac{df}{dz}$, resulta de la (9)

$$w - c = \frac{dF}{dz},$$

per altra part $F = \Phi + i\Psi$, i per la monogeneïtat,

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

El quadrat del mòdul de $w - c$ pot presentar-se, en conseqüència, sota la forma

$$|w - c|^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = \Delta \Phi,$$

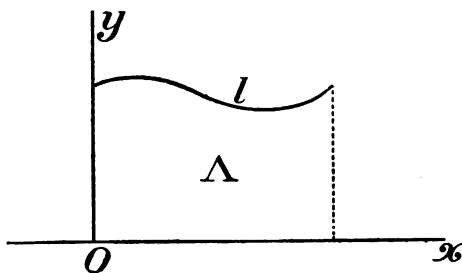
Per un corol·lari del lema de Green, si Λ és un tros qualsevol de L , i s és el contorn que li correspon,

$$\int_{\Lambda} \Delta \Phi dL = - \int_s \Phi \frac{d\Phi}{dn} ds ;$$

en la qual fórmula dn és un element de normal a s dirigida cap a l'interior del camp.

Per evaluar τ' convé integrar $\frac{1}{2} \Delta \Phi dL$ per a una àrea Λ corresponent a una llargada d'ona λ , i dividir després per λh .

El contorn s de Λ vindrà fet de quatre parts : un fons de llargada λ (entre $x = 0$, v. gr., $x = \lambda$); dues línies



congruents (respecte d'una translació d'amplitud λ) que uneixin l'extrem del tram de fons anterior amb el perfil lliure (per a fixar les idees, seran les dues ordenades de l corresponents a les abscisses $x = 0$ i $x = \lambda$); finalment, l'arc de l comprès entre les referides ordenades.

Donada la periodicitat de Φ , té aquesta el mateix valor en punts homòlegs de les dues ordenades, i $\frac{d\Phi}{dn}$

valors oposats (perquè dn està sempre dirigit a dins). Per tant, les parts amb què les ordenades contribueixen a l'integral

$$\int \Phi \frac{d\Phi}{dn} ds$$

es destrueixen mútuament. El fons, per altra part, no hi aporta res tampoc, perquè en ell $\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$, per ser $\Phi = \varphi - cx$, i, per tant, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v = 0$.

D'això en resulta que

$$\tau' = \frac{1}{2\lambda h} \int_{\Lambda} \Delta\Phi dL$$

queda reduït a

$$\tau' = -\frac{1}{2\lambda h} \int \Phi \frac{d\Phi}{dn} dl ,$$

estès a l , i compronent una llargada d'ona, de $x = 0$ a $x = \lambda$.

Fins aquí el càlcul és rigorós. Per a seguir convé tenir compte de la circumstància que la quantitat sota el signe integral és ja de segon ordre en μ ; de manera que, en la integració al llarg de l es pot assimilar aquesta l a l'horitzontal $y = h$, despreciant solament termes de tercer ordre.

Aleshores $dl = dx$, $dn = -dy$, i, per tant,

$$\tau' = \frac{1}{2\lambda h} \int_0^\lambda \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} dx .$$

En aquesta fórmula $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ha de referir-se a $y = h$.
De les (19') i (9) es dedueix

$$F = \Phi + i\Psi = -\frac{c\mu}{2\pi} \lambda \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{\lambda}.$$

Igalant les parts reals i les imaginàries, i recordant que l'altura val $\frac{\mu\lambda}{2\pi} Sh.\alpha$, tal que es pot escriure $\frac{a}{Sh.\alpha}$ en lloc de $\frac{\mu\lambda}{2\pi}$ resulta:

$$\Phi = -\frac{ca}{Sh.\alpha} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} \operatorname{Ch} \frac{2\pi y}{\lambda}.$$

De la (15') es desprèn:

$$\left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=h} = c^2 a^2 \frac{1}{Tgh.\alpha} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Integrant per tota una llargada d'ona, i recordant l'expressió de τ' , resulta:

$$\frac{\tau'}{\frac{1}{2}c^2} = \frac{1}{2\lambda h} a^2 \frac{1}{Tgh.\alpha} 2\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{Tgh.\alpha} \frac{2\pi h}{\lambda}.$$

Per la (15') altra vegada, i per l'equació d'Airy, s'obté, en definitiva, de la (11'),

$$(21) \quad \frac{\gamma}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{gh}{c^2};$$

ço que demostra com la velocitat mitjana de transport γ ,

de la qual ja era sabut a priori que és de segon ordre respecte a la velocitat de propagació, ne difereix pel factor de reducció $\left(\frac{a}{h}\right)^2$, que també és de segon ordre, i pel factor finit $\frac{1}{2} \frac{gh}{c^2}$.

15. EXISTÈNCIA DE SOLUCIONS RIGOROSES.

INDICACIONS DE LES RECERQUES DE CISOTTI.

Després d'haver deduït l'equació mixta (E') i d'haver afirmat que és la clau de tota la teoria de les ones periòdiques, ens hem limitat a discutir-ne les solucions de primera aproximació, conegudes, d'altra part, fa ja molt temps. Hom pot preguntar-se, doncs, quin ha estat el progrés que en substància s'hagi aconseguit amb la (E'). La curtària de l'hora no em permet d'entretenir-m'hi llargament. Mes he de declarar d'una manera franca que no he aconseguit fins ara treure de la (E') ço que creia poder-ne obtenir aplicant la teoria de funcions, és a dir, amb el teorema general d'existència, i, per tant, un algoritme constructiu de solucions rigoreses corresponents a ones de determinada λ i convenient velocitat de propagació c .

És una qüestió d'existència que té importància, i no sols matemàtica o especulativa; mes està encara *sub judice* des del punt de vista físic. Stokes va ser el primer d'estudiar el problema en segona i fins en tercera aproximació, provant de satisfer totes les condicions en la hipòtesi de ser despreciable no sols $\beta^2 = \left(\frac{V_a}{c}\right)^2$, com en la teoria elemental, sinó solament β^3 o β^4 ; deduint

propietats notables conformes amb l'experiència en la part efectivament susceptible de control experimental. D'això en deduïa ell que era evident l'existència d'ones periòdiques que es propaguen sense alterar el tipus, i considerava com a problema de caràcter purament matemàtic la confirmació rigorosa d'aquesta intuïció, o sia la possibilitat d'aplicar sense límit un procés convergent d'aproximacions successives.

Lord Rayleigh, de primer cop, creia molt dubtosa l'existència d'ones periòdiques de tipus permanent, per escrúpols respecte de l'estabilitat; mes en el transcurs de la seva vida es va anar acostant a la impressió contrària a conseqüència dels resultats (aproximat) de Mc. Cowan, així com de l'èxit del mètode dit de dinàmica ignota, de Korteweg i De Vries.

Lord Rayleigh, com és propi dels genis, va callar el motiu de la seva evolució per evitar als estudiosos futurs els dubtes que li eren propis, reprenent ell mateix les recerques de Stokes i apurant-ne l'aproximació.

Mes l'última paraula hauria de ser reservada a l'equació (E'), sobre la qual no puc fer altra cosa, per ara, que un auguri.

Afegiré, solament, que l'equació mateixa s'és mostrada molt convenient per a l'estudi de les aproximacions successives,⁽¹⁾ i que, per altra banda, el Prof. Cisotti,⁽²⁾ estenent al problema general del moviment per ones *variables* les consideracions desenrotllades aquí per les ones de tipus permanent, ha pogut establir una equació mixta

1. V. U. Crudeli : *Sulle onde progressive di tipo permanente oscillatorie* (*Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XXVIII, «segon semestre 1919», pàgs. 174-178; vol. XXIX «segon semestre 1920», pàgs. 174-178, i volum XXIX «segon semestre 1920, pàgs. 265-269).

2. *Ibd.*, vol. XXVII, (segon semestre 1918), pàgs. 255-259, 312-216; vol. XXVIII, (primer semestre 1919), pàgs. 196-199; vol. XXIX (primer semestre 1920), pàgs. 131-133, 175-180, 261-264.

anàloga a la (E) $\left(\text{i contenint } \frac{\partial w}{\partial t} \right)$ ço que, per al cas de petits moviments, li ha servit per a estudiar de manera neta i brillant la propagació per ones en un canal de fondària qualsevol h , i així ha pogut analitzar la influència del fons en les ones, obtenint un progrés considerable sobre les recerques cèlebres de Poisson i Cauchy, aplicables sols al cas de fondària infinita.

CONFERÈNCIA III

PARAL·LELISME I CURVATURA EN UNA VARIETAT QUALSEVOL

I. PARAL·LELISME SUPERFICIAL

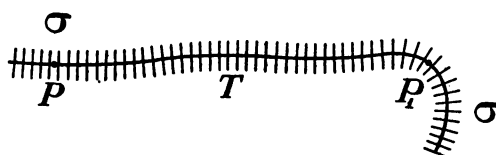
Considerem una varietat de dues dimensions, és a dir, una superfície σ ; un punt P en ella amb el seu pla tangent $\bar{\omega}$, i una direcció determinada, d'origen P i continguda en $\bar{\omega}$, és a dir, tangencial a σ . La direcció podrà venir individualitzada pel corresponent *versor* (vector unitari) u , de manera que en el successiu, en dir simplement direcció u , serà entesa la direcció quin versor és u .

Sigui P_1 un altre punt qualsevol de σ , i sigui $\bar{\omega}_1$ el pla tangent a σ en el punt P_1 .

Si la superfície és *desenrotllable*, és evident que pot establir-se entre les direccions tangencials d'origen P i les direccions tangencials d'origen P_1 una correspondència per paral·lelisme, anomenant *paral·lela* a u en sentit *superficial* la u_1 que esdevé paral·lela a u en sentit ordinari en fer el desenrotllament de la superfície σ sobre d'un pla.

Aquest criteri és inaplicable al cas d'una superfície no desenrotllable (tal com l'esfera entre les més senzilles), mes sembla oportú cercar-ne una generalització conve-

nient. S'hi arriba de la manera més senzilla afegint als elements de posició anteriors una llei de relligament,



arbitrària a priori; de tal manera, per exemple, que, suposant deduït P_1 pel seguiment PP_1 d'una corba *determinada de transport* T , i considerant la desenrotllable circumscriu σ_τ a la superfície σ al llarg de T , el paral·lisme respecte a σ al llarg de T vinguí referit al paral·lisme respecte a σ_τ .

2. PRIMERES CONSEQÜÈNCIES EQUIPOL·LÈNCIA SUPERFICIAL DE VECTORS

Una conseqüència òbvia de la definició precedent és que, al revés del que s'esdevé amb les desenrotllables, la paral·lela a u en el punt P , no ve determinada unívocament per les posicions de P i P_1 , i la direcció de u , sinó que depèn, en general, de la corba de transport. És a dir que la noció de paral·lisme així introduïda és semblant a la de treball en la qual intervé la integral d'una expressió de la forma $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$; expressió en la qual x_1 i x_2 són coordenades de qualsevol classe en la superfície σ , i el qual valor, el de la integral, pres entre dos punts P i P_1 varia també, en general, en variar la línia T d'integració. Solament en el cas en què $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$ sigui un diferencial exacta, el treball no depèn del camí o corba d'integració.

Tornant al paral·lisme al llarg de T , es veu im-

mediatament que, donades dues direccions a i b eixint del punt P , les dues direccions paral·leles eixint de P_1 , i que anomenarem a_1 i b_1 , formen entre si el mateix angle que a i b . Perquè, d'una banda, en el pla en el qual es desenrotlli σ_T es retroba el paral·lisme ordinari entre a i a_1 , b i b_1 , i per altra és sabut que el desenrotllament no altera els angles.

En ço que s'ha vingut dient fins ara, s'és tractat sols de direccions, de versors. Mes idèntiques construccions que les indicades pel pas de u a u_1 poden aplicar-se a un vector tangencial R de llargada qualsevol R . Si és anomenat u el versor corresponent, tindrem $R = Ru$ i el vector paral·lel serà $R_1 = Ru_1$, és a dir, un vector aplicat a P_1 amb la mateixa llargada que R , mes amb la direcció de u_1 . Dels dos vectors R i R_1 es dirà que són *equipol·lents* amb referència al camí T .

Aquesta noció d'equipol·lència superficial és referible al paral·lisme, és a dir que són equipol·lents dos vectors tangencials quan són paral·lels i tenen la mateixa llargada.

El cas en què T és una geodèsica té especial interès. Del fet de ser T geodèsica respecte a σ se'n treu que també ho és per σ_T , ja que els plans osculadors de T , essent normals a σ (propietat específica de les geodèsiques), ho han de ser a σ_T , que té els mateixos plans tangents i, per tant, les mateixes normals que σ . En desenrotllar σ_T la geodèsica es transforma en una recta. Per tant, si la direcció que es transporta per paral·lisme al llarg de T és la de T mateixa, o sia la de la seva tangent en el punt P , la direcció paral·lela serà en tot punt tangent a la geodèsica. Amb altres paraules, *la geodèsica té la propietat que els seus elements tenen direccions paral·leles* respecte del transport al llarg de la mateixa geodèsica.

Aquest enunciat és una extensió a les superfícies de

qualsevol naturalesa d'aquella intuïció primordial que, referint-se a la recta, tradueix Euclides amb les paraules *εὐθεία γραμμὴ ἐστὶν ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ'ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*.

3. TRANSPORT INFINITESIMAL

FORMA DIFERENCIAL DE LA LLEI DE PARAL·LELISME

Sigui P_1 un punt de la superfície indefinidament prop de P . El camí PP_1 queda així reduït a l'arc elemental PP_1 ; arc que, salvant indefinidament petits d'ordre superior al primer, queda unívocament determinat pels extrems P i P_1 . En desenrotllar, el pla $\bar{\omega}_1$ gira al voltant de la generatriu r , que és la recta d'intersecció de $\bar{\omega}$ i $\bar{\omega}_1$. És sabut que la direcció de r és la conjugada de PP_1 en el punt P o P_1 (la diferència és infinitesimal). Serà anomenat $-\omega$ el vector infinitesimal paral·lel a r que figura en direcció i sentit la rotació elemental en rebatre $\bar{\omega}_1$ sobre $\bar{\omega}$. Inversament ω és la rotació que retorna a $\bar{\omega}_1$, del pla de rebatiment $\bar{\omega}$, a la seva posició natural de tangència en el punt P_1 . Sigui u una direcció qualsevol eixint de P . Per obtenir la paral·lela tangencial u_1 és traçarà la paral·lela ordinària en el pla del desenrotllament, després es portarà u_1 a la seva posició en el pla $\bar{\omega}_1$, desfent el rebatiment. És a dir, u_1 s'obté per rotació ω de u . Segons les nocions més elementals de Cinemàtica, si du és el vector diferencial entre u_1 i u , designant per $\wedge^{(1)}$ el producte vectorial, tindrem

$$du = \omega \wedge u \quad .$$

Els vectors ω i u pertanyen al pla $\bar{\omega}$, i, per tant,

1. La notació $\wedge$ per a representar el producte vectorial o extern és la de Marcolongo i Burali-Forti, avui molt estesa i usada.

du és perpendicular al dit pla, a no ésser que sigui nul.⁽¹⁾
Per tant, si τ és un versor de $\bar{\omega}$, el producte escalar

$$(I) \quad \tau \times du = 0 \quad .$$

Aquesta expressió diu que els dos productes $\tau \times u_1$ i $\tau \times u$ difereixen sols per infinitedsimos d'ordre superior al primer. Tractant-se de vectors unitaris, la igualtat dels productes $\tau \times u_1$ i $\tau \times u$ implica la dels angles, o sia la paral·lela u_1 a u forma amb una direcció qualsevol τ tangencial en P el mateix angle que u (o bé millor la diferència és d'ordre infinitesimal superior al primer).

Recíprocament, la propietat angular que s'esmenta, i amb ella la (I) és *característica*, de manera que pot donar-se com a definició (diferencial) del paral·lelisme a la superfície. Per provar-ho, observi's en primer lloc que, havent de ser zero $\tau \times du$ per a qualsevol direcció τ de $\bar{\omega}$, du serà necessàriament perpendicular al pla o bé nul. Per altra part, u_1 , és a dir, $u + du$ ha de pertànyer al pla $\bar{\omega}_1$. Descomponent u en un vector paral·lel al pla $\bar{\omega}_1$ i altre vector perpendicular al pla $\bar{\omega}$, restaran ben determinades les components u_1 i du de u

$$u = u_1 - du,$$

i definit, per consegüent, el vector u_1 .

1. Aquesta circumstància es presenta quan la direcció de u i la de ω coincideixen. La direcció de ω és, com ja hem dit, la conjugada de PP_1 . En tal cas, i sols en tal cas, la paral·lela superficial coincideix amb la paral·lela euclídia. Aquesta observació es deu al Prof. Bompiani qui n'ha tret partit, en un cert treball en premsa, per a generalitzar la teoria dels sistemes conjugats en les superfícies pertanyent a espais no euclidis.

4. DESPLAÇAMENTS VIRTUALS. EQUACIÓ SIMBÒLICA

Es pot donar a l'expressió (1) una forma diversa introduint en lloc del versor τ un desplaçament virtual respecte de la superfície σ , és a dir, un δP qualsevol, infinitèsim, dirigit tangencialment i eixint de P . Un valor tal com δP és sempre representable en la forma $\epsilon\tau$, designant per ϵ l'amplitud. Bastarà multiplicar (1) per ϵ i s'obtindrà

$$(1') \quad du \times \delta P = 0,$$

que recorda el principi dels treballs virtuals.

I, així com aquest compendia la definició d'acceleració (increment de velocitat), en el pas d'un instant a l'indefinidament veí, la (1'), més senzilla encara, compendia la variació del versor u en l'espai quan aquesta direcció ve transportada de P a P_1 per paral·lelisme superficial, essent P_1 indefinidament prop de P .

Introduint un sistema de coordenades cartesianes $Oy_1y_2y_3$, i anomenant α_v ($v = 1, 2, 3$) els cossinus directores de u , i δy_v a les components d'un desplaçament virtual δP , la (1') pot venir substituïda per la relació escalar equivalent

$$(2) \quad \sum_{v=1}^3 d\alpha_v \delta y_v = 0,$$

amb la qual es poden considerar definits els increments dels cossinus α_v .

Per al d'un transport finit al llarg d'una corba T , de la qual s representi l'arc, els cossinus α_v de la direcció u podran ser considerats com a funcions de s , i les de-

rivades $\frac{d\alpha_r}{ds} = \alpha'_r$ tindran en tot punt de T valors definits per l'equació simbòlica

$$(2') \quad \sum_1^3 \alpha'_r \delta y_r = 0$$

equivalent a la (1), o si es vol a la construcció geomètrica indicada a propòsit de la desenrotllable σ_π .

5. CARÀCTER INTRÍNSEC DE LA NOCIÓ DE PARAL·LELISME

Si la corba de transport T és una geodèsica, el paral·lelisme depèn tan solament de la superfície σ per la naturalesa de l'element lineal ds^2 , mes no per la configuració de la superfície en l'espai, com podria deixar entendre la construcció geomètrica que fa ús d'aquest espai, o la fórmula (2) referida també al dit espai.

Per provar-ho, recordi's la propietat general de la conservació dels angles, així com la propietat especial de les geodèsiques que conserven la direcció pròpia, de la qual cosa es dedueix que la paral·lel u_1 en el punt P_1 a una direcció donada u eixida de P , pot considerar-se determinada per la doble condició de pertànyer a σ i de formar amb la geodèsica en el punt P_1 el mateix angle que u forma amb la geodèsica en el punt P . I aquestes propietats angulars depenen tan sols de la mètrica de σ .

Pot estendre's al cas general la consideració anterior relativa a una geodèsica imaginant dividida la corba de transport de P a P_1 en una sèrie de transports elementals, en cada un dels quals l'alteració elemental que sofreix la direcció de u ve definida per la posició dels extrems de l'element d'arc, sense que influeixin els elements veïns.

I com que per a un arc geodèsic, l'alteració és intrínseca, és a dir, depèn tan solament del ds^2 de la superfície σ i no de la forma d'aquesta en l'espai circumdant, l'alteració de u , i, per tant, el paral·lelisme, tenen comportament intrínsec, sigui la que es vulgui la línia de transport.

6. REPRESENTACIÓ ANALÍTICA

És convenient procedir a un tractament sistemàtic del paral·lelisme imaginant introduïdes en la superfície σ coordenades curvilínies qualsevols x_1, x_2 i transformant (2) per a donar-li altra expressió adequada.

Les coordenades cartesianes y_ν dels punts de σ són funcions ben determinades de x_1 i x_2 , i la superfície vindrà definida per

$$(3) \quad y_\nu = y_\nu(x_1, x_2) \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad .$$

El quadrat de l'element lineal, és a dir, de la distància de dos punts indefinidament pròxims en la superfície i corresponents als valors x_i i $x_i + dx_i$ ($i = 1, 2$), val

$$(4) \quad ds^2 = \sum_{\nu}^3 dy_{\nu}^2 = \sum_{i,k}^2 a_{ik} dx_i dx_k \quad .$$

En tot punt regular de la superfície, les a_{ik} són funcions regulars de les coordenades, és a dir, finites, contínues i derivables quantes vegades es vulgui; la forma diferencial quadràtica és definida i positiva, etc.

Sigui un punt P de σ de coordenades curvilínies x_1, x_2 i coordenades cartesianes y_1, y_2, y_3 funcions de les primeres donades per (3). Una direcció superficial u eixida de P és caracteritzada pels increments infinitesimals dx_1, dx_2 en passar de P a un punt indefinidament

pròxim en la superfície σ movent-se en la direcció de u . A tot parell de diferencials dx_1, dx_2 correspon una direcció ben determinada; mes la recíproca no és certa, perquè una direcció pot correspondre a infinits parells de dx_1, dx_2 d'amplituds proporcionals. Per fer unívoca la correspondència, s'introdueixen els anomenats *paràmetres de direcció*, és a dir,

$$u^{(1)} = \frac{dx_1}{ds} \quad u^{(2)} = \frac{dx_2}{ds}.$$

Aquests paràmetres, que es redueixen als cossinus directors quan σ és plana i les x_1, x_2 són coordenades cartesianes ortogonals, estan relacionats per l'equació (4), o sia

$$(5) \quad \sum_i^2 a_{ik} u^{(i)} u^{(k)} = 1,$$

que en el pla i fins en l'espai euclidi es redueix a la coneguda propietat de ser igual a 1 la suma dels quadrats dels cossinus.

La u pot interpretar-se com a direcció en l'espai circumdant; en aquesta accepció li corresponen tres cossinus directors α_v respecte dels eixos de referència y , essent les

α_v les relacions $\frac{dy_v}{ds}$ corresponents a l'element d'arc ds en

la direcció de u . Els increments dy poden expressar-se en funció dels increments dx_i diferenciant la (3). Amb la qual cosa, recordant la definició de $u^{(1)}$ i $u^{(2)}$,

$$(6) \quad \alpha_v = \sum_i^2 \frac{\partial y_v}{\partial x_i} u^{(i)}.$$

De semblant manera es podrien deduir de les (3) les

expressions de les components δy_i d'un desplaçament virtual δP . Un tal desplaçament en la superfície σ s'obtéindrà atribuint a x_1 i x_2 increments infinitèsims virtuals, és a dir, arbitraris δx_1 , δx_2 . Pels quals, les coordenades cartesianes y_v tindran a llur torn els increments

$$(6') \quad \delta y_v = \sum_k^2 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \delta x_k.$$

Anem a procedir ara com en la definició de les equacions clàssiques de Lagrange partint del principi de les velocitats virtuals. Les valors (6) i (6') seran substituïdes en la fórmula (2), i anul·lats els coeficients de les arbitràries δx_k . És a dir,

$$\sum_i^3 d\alpha_i \delta y_v = \sum_k^2 \delta x_k \sum_i^2 \sum_j^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} d \left(\frac{\partial y_v}{\partial x_j} u^{(j)} \right) = 0$$

i, per tant,

$$\sum_i^2 \sum_j^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} d \left(\frac{\partial y_v}{\partial x_j} u^{(j)} \right) = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Aquestes equacions defineixen les valors de $du^{(1)}$, $du^{(2)}$, és a dir, dels increments que experimenten els paràmetres d'una direcció u quan és transportada per paral·lelisme al llarg del camí elemental dx_1 , dx_2 . Hi figuren les expressions paramètriques de les coordenades cartesianes y_v (x_1 , x_2), de manera que no se'n dedueix, sense altra transformació, llur caràcter necessàriament intrínsec. Mes és fàcil donar-los forma adequada, és a dir, tal que no hi figurin altres elements fora dels que intervenen en l'expressió del ds^2 .

Recordant, a l'efecte, l'expressió dels coeficients a_{ik} que resulta de (4)

$$a_{ik} = a_{ki} = \sum_{\nu}^3 \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_k},$$

i introduint els símbols de Christoffel de primera espècie

$$a_{jl, k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k} \right),$$

resulta

$$a_{jl, k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{\nu}^3 \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{\nu}^3 \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_k} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{\nu}^3 \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_l} \right\} = \sum_{\nu}^3 \frac{\partial^2 y_{\nu}}{\partial x_l \partial x_j} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_k}$$

i, per tant,

$$\sum_{\nu}^3 a_{jl, k} dx_l = \sum_{\nu}^3 \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_k} d \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_j}.$$

En virtut d'aquesta identitat i de la definició de a_{kj} , les dues equacions definidores del paral·lelisme esdevenen

$$\sum_{\nu}^2 a_{kj} du^{(\nu)} + \sum_{\nu}^2 a_{jl, k} u^{(\nu)} dx_l = 0 \quad (k = 1, 2),$$

en la qual ja no hi ha rastre d'elements estranys a la mètrica superficial.

Convé, encara, que apareguin resoltes respecte de les $du^{(i)}$, per a la qual cosa es multiplicaran ordenadament per $a^{(ki)}$ ⁽¹⁾ i els resultats es sumaran ordenadament respecte

1. Les $a^{(ik)}$ són els coeficients de la forma quadràtica recíproca de $\sum_{\nu}^2 a_{\nu k} dx_{\nu}$. Una d'elles, vg. $a^{(ik)}$, és el complement algebàric de a_{ik} en el determinant a d'aquestes quantitats, després de dividir-ne el valor pel d'aquest determinant.

l'índex k . Com que, per una propietat elemental dels determinants,

$$\sum_k a_{kj} a^{(ki)} = \varepsilon_{ij} \quad (\varepsilon_{ij} = 0 \text{ per } i \neq j, \varepsilon_{ii} = 1),$$

resulten, introduint el símbol de segona espècie de Christoffel

$$\left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\} = \sum_k a^{(ki)} a_{j l, k}.$$

les fórmules següents:

$$(7) \quad du^{(i)} + \sum_l \left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\} u^{(j)} dx_l = 0 \quad (i = 1, 2),$$

que assenyalarem com a formes definitives de les *equacions diferencials del paral·lelisme*. En aquestes equacions, $u^{(1)}$ i $u^{(2)}$ són els paràmetres de la direcció que es transporta, dx_1, dx_2 defineixen el transport, i els símbols $\left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\}$, que són funcions de la posició del punt, depenen de la mètrica en la varietat en què s'opera.

Dels diferencials pot passar-se tot seguit a les derivades, suposant que el camí dx_1, dx_2 pertanyi a una corba determinada T. Siguin

$$x_i = x_i(s) \quad (i = 1, 2)$$

les equacions paramètriques de la corba, en les quals s és l'arc comptat a partir d'un origen arbitrari. Per a un transport elemental ds al llarg de T,

$$dx_i = x'_i ds,$$

afecten amb un índex les lletres que figuren derivades respecte a s . Les equacions (7) dividides per ds donen

$$(7') \quad \frac{du^{(i)}}{ds} + \sum_i^2 \{j_i^{(i)}\} u^{(i)} x'_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Al llarg de T , les x i els $\{j_i^{(i)}\}$, així com les x' , són funcions conegudes de la variable s . El sistema (7') és, doncs, un sistema d'equacions diferencials lineals a què han de satisfer les funcions incògnites $u^{(i)}(s)$. Aplicant ara els teoremes d'existència venim a retrobar analíticament ço que geomètricament és cosa d'evidència, és a dir, que, donada una direcció arbitrària en la varietat considerada eixint d'un punt P de T , les direccions paral·leles en tot altre punt de la corba són ja determinades.

7. TRANSPORT PER EQUIPOL·LÈNCIA. COMMUTABILITAT.

Ja s'ha advertit al núm. 2 com l'operació geomètrica del transport per paral·lelisme superficial pot aplicar-se tant a les direccions o vectors unitaris com als vectors tangencials de llargada qualsevol. És natural que per al procés analític sigui vàlid a la mateixa extensió, ja que un vector R tangent a σ és caracteritzat en direcció i llargada en la mètrica de la varietat per dos elements $R^{(i)}$ (sistema contravariant), elements proporcionals als paràmetres $u^{(i)}$ de la seva direcció, amb la constant de proporcionalitat igual a la seva amplitud R :

$$R^{(i)} = Ru^{(i)} \quad (i = 1, 2),$$

i, així,

$$\sum_i^2 a_{ik} R^{(i)} R^{(k)} = R^2.$$

És convenient observar que aquests vectors tangencials caracteritzats intrínsecament pels dos números $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ provenen de la imatge geomètrica d'un segment disposat tangencialment a partir d'un punt de la superfície σ , encara que el vector no estigui tot ell contingut a la superfície, almenys en general. Si es tractés de vectors infinitesimals, l'element del pla tangent al qual pertanyerien es confon aleshores amb l'element superficial de σ al voltant de P , i aleshores si que es pot dir que no surt de σ . Un vector tangencial infinitèsim és, doncs, com un desplaçament dins de σ . En tal cas, la llargada R es redueix a la d'un element lineal, i les $R^{(i)} = u^{(i)} ds$ poden identificar-se als increments dx_i de les coordenades curvilínies en passar de P a P_1 .

Sigui un vector tangencial de qualsevol llargada (finita o infinitèsima). Les equacions (7) en les quals es substitueixen materialment les $R^{(i)}$ a les $u^{(i)}$, és a dir,

$$(8) \quad dR^{(i)} + \sum_j \left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\} R^{(j)} dx_j = 0 \quad (i = 1, 2),$$

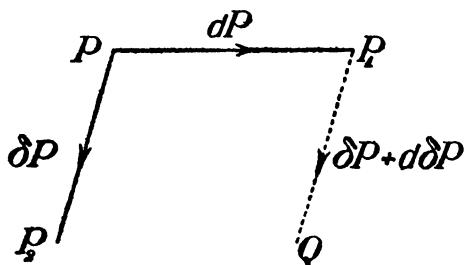
defineixen un transport per equipol·lència, perquè la direcció del vector canvia segons la llei del paral·lelisme, mentre la llargada roman la mateixa.⁽¹⁾

Establert això, siguin dos sistemes de diferencials dx_i , δx_i i els vectors infinitesimals corresponents (definites en σ) $dP = PP_1$, $\delta P = PP_2$.

Sigui df l'augment d'un vector f o element subordinat a ell, quan es passa de P a P_1 per equipol·lència superficial. Atribuïrem significat per l'estil a δP respecte al pas de P a P_2 . De la mateixa manera $d\delta P$ serà l'in-

1. Per a la verificació vegeu el paràgraf 6 de la meua memòria *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, etc.*, «Rendiconti del circolo mat. de Palermo», t. XLII, 1917, pàgs. 1-32.

crement de δP pel transport de P a P_1 i $d\delta x_i$, l'increment subordinat en el seu sistema contravariant δx_i . Per a



aquest últim la (8) dóna

$$(9) \quad d\delta x_i = - \sum_j \langle j|l \rangle \delta x_j dx_i \quad (i = 1, 2).$$

El transport de dP desde P a P_2 donarà lloc a l'increment δdP , i de manera semblant

$$\delta dx_i = - \sum_j \langle j|l \rangle dx_j \delta x_i$$

Com que els símbols de Christoffel són simètrics respecte als índexs superiors, és a dir $\langle j|l \rangle = \langle l|j \rangle$, canviant materialment j per l en una de les sumes, resulta

$$d\delta x_i = \delta dx_i,$$

és a dir, la llei de commutació dels operadors d i δ .

Geomètricament, el resultat és susceptible d'interpretació senzilla. Per a vectors infinitesimals, els elements del sistema contravariant són diferències de coordenades homòlogues. Per tant, si x_i són les coordenades de P , el punt P_1 tindrà per coordenades $x_i + dx_i$; el punt P_2 ,

$x_i + \delta x_i$. Si és Q el punt de σ , al qual s'arriba eixint de P_1 el vector equipol·lent a δP , com que el sistema contravariant d'aquest últim és $\delta x_i + d\delta x_i$, les coordenades curvil·línies de Q seran

$$x_i + dx_i + \delta x_i + d\delta x_i \quad (i = 1, 2),$$

expressions que no alteren en canviar d per δ , de manera que s'arriba al mateix punt Q , eixint de P_2 el vector equipol·lent a dP . Pot dir-se de manera més expressiva, que, *per a vectors infinitesimals equipol·lents en la superfície, val la regla del paral·lelogram.*⁽¹⁾

Observació. — En ço que precedeix es tenen en compte quantitats de segon ordre del tipus $d\delta x_i$, però es desprecien $(dx_i)^2$, $(\delta x_i)^2$. Si es vol tenir-ne en compte considerant els vectors δP , dP , com a vectors en l'espai, en traçar els equipol·lents superficials per a P_1 i per a P_2 , ja no resulta un paral·lelogram, ni tan sols un quadrilàter tancat. Recordant, en efecte, la construcció en l'espai de vectors equipol·lents superficialment (construcció indicada en el núm. 3), es treu la conseqüència que $d\delta P$ i δdP , si bé tenen comú la direcció de la normal a la superfície σ en el punt P , llurs llargades seran, en general, diferents, ja que els tres punts P , P_1 , P_2 i els plans tangents respectius $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ no tenen *a priori* altra relació que la de ser indefinidament propers els uns dels altres.

1. Es pot partir d'aquesta propietat per a establir intrínsecament el paral·lelisme respecte de la mètrica de σ , prescindint de l'espai circumdant. El mateix mètode s'aplica a les varietats V_n de n dimensions. Cf. H. Weyl : *Gravitation und Elektrizität, Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss.*, 1918, pàgs. 465-480.

8. SOBRE LA VARIETAT D'UN NOMBRE QUALSEVOL DE DIMENSIONS

Sigui V_n una varietat abstracta de n dimensions corresponent al continu numèric $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o més precisament a un camp qualsevol d'aquest continu, al qual vénen referides les consideracions que segueixen.

Imaginem en V_n una determinació mètrica donada per la distància ds entre dos punts x_i i $x_i + dx_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) indefinidament veïns, la qual tingui la forma

$$ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k,$$

en què les a_{ik} són funcions de les coordenades x en V_n ; funcions finites i contínues, junt amb llurs derivades primera i segona, i tals que la forma quadràtica sigui definida i positiva.

La varietat V_n pot suposar-se sempre col·locada en un espai euclidi, circumdant d'un nombre de dimensions prou alt N (no superior a $\frac{n(n+1)}{2}$). És a dir, que és possible (i en general ho és d'infinites maneres) introduir N funcions de les x_i .

$$y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

tal que resulti idènticament

$$(10) \quad ds^2 = \sum_i^N dy_i^2 = \sum_{ik}^n a_{ik} dx_i dx_k .$$

Les N quantitats y_i poden ser mirades com a coordenades en un espai S_N de N dimensions; i fins com a coordenades cartesianes del dit espai amb una mètrica euclídia per ser

$$ds^2 = \sum_i^N dy_i^2 .$$

Dintre S_N , considerem una varietat de n dimensions que vingui definida per les equacions paramètriques

$$(11) \quad y_v = y_v(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (v = 1, 2, \dots, N) .$$

Segons la (10), se li fa correspondre precisament la mètrica V_n , i la varietat (11) [o una qualsevol de les (11) si hi ha diverses maneres d'escollir les N funcions y_v] podrà considerar-se un model tangible de la V_n si és que pot anomenar-se tangible un espai de més de tres dimensions. Per a $n = 2$, $N = 3$ és el cas d'una varietat de dues dimensions en un espai euclidi i el model tangible de V_2 amb mètrica determinada seria una superfície σ convenient en l'espai ordinari. Tot ço que s'ha establert en els capítols anteriors sobre paral·lelisme en σ podria considerar-se estès a V_n .

Mitjançant (11) i (10) és fàcil estendre la noció de paral·lelisme a V_n substituint a 2 el número n i a 3 el número N .

Establert l'anterior, recordarem encara les generalitats següents : tot sistema de diferencials dx_i atribuït a una determinada ènnupla de valors de x_i , fixa una

direcció u eixida del punt P , que representa l'ènnupla o sistema de n valors x_i . Si P_1 és el punt $x_i + dx_i$ i ds és l'element lineal PP_1 , els nous paràmetres de direcció seran

$$u^{(i)} = \frac{dx_i}{ds} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Aquests paràmetres, en virtut de la (10), estan lligats per la relació quadràtica

$$(12) \quad \sum_i^n a_{ik} u^{(i)} u^{(k)} = 1,$$

anàloga a la (5). Una direcció determina els seus paràmetres (en canvi no determina les diferencials dx_i) i recíprocament, en la hipòtesi que sigui vàlida la (12).

Donats els dx_i , es coneixeran les valors de

$$(13) \quad dy_\nu = \sum_i^n \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} dx_i \quad (\nu = 1, 2, \dots, N),$$

i les dy_ν , així definides marquen una direcció en l'espai euclidi S_N . Dita direcció serà indicada per u , símbol que a la vegada considerem que representa el versor corresponent. Les seves components són els cossinus directors, o sia les relacions $\frac{dy_\nu}{ds} = \alpha_\nu$, (paràmetres respecte a S_N) de (13).

Canviant i en j , resulta

$$(14) \quad \alpha_\nu = \sum_i^n \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} u^{(i)}.$$

De les (13) mateixes, canviant d en δ , j en k , és té

$$(15) \quad \delta y_\nu = \sum_k^n \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \delta x_k.$$

Amb això es tenen tots els elements per a definir per analogia el transport $P.V_n$ d'una direcció u , des de P a un punt indefinidament pròxim P_1 per paral·lelisme relatiu a V_n , que aquest és el significat que atribuirem a $P.V_n$.

9. EXTENSIÓ DEL CONCEPTE DE PARAL·LELISME FÓRMULES I PROPIETATS CONSEGÜENTS

Per definir el paral·lelisme relatiu a una V_n , és a dir, a una superfície σ en l'espai ordinari, s'ha recorregut a la desenrotllable circumscrita a σ al llarg d'una línia T . Per a la V_n manca un criteri semblant, perquè els ∞^1 espais lineals (de n dimensions) que existeixen en S_N tangents a una V_n al llarg d'una línia T no fan, en general, per ($N > n + 1$) unes varietats desenrotllables.

Mes és aplicable immediatament àdhuc a les V_n la llei diferencial del paral·lelisme expressada per la (1), és a dir (n.º 3), la següent condició geomètrica: *La paral·lela u_1 a u traçada per un punt P_1 infinitament proper a P , ha de formar (prescindint d'infinitesimals d'ordre superior al primer) el mateix angle que fa u amb qualsevol direcció tangencial τ , (és a dir, situada en V_n) que surti de P .*

Si $d\alpha_n$ són els increments desconeguts dels cossinus directors de la direcció que s'ha de transportar per $P.V_n$, i τ_n són els cossinus directors d'una direcció tangencial qualsevol, la condició angular enunciada equival a

$$\sum_1^N d\alpha_n \tau_n = 0$$

Com en el número 4, les direccions τ són aquelles, i sols aquelles, compatibles amb els lligams (11). Subs-

tituint a les τ les δy_ν proporcionals, es podrà definir el paral·lelisme per l'equació simbòlica

$$(16) \quad \sum_{\nu}^N d\alpha_\nu \delta y_\nu = 0$$

vàlida per tot desplaçament virtual δy^ν compatible amb els lligams (11).

La fórmula és anàloga a la (2), que defineix el paral·lelisme superficial, n'hi ha prou amb fer variar ν de 1 a N aquí, com allí variava de 1 a 3. La mateixa analogia ofereixen les (14) i (15) en relació amb les (5) i (6), amb la diferència que els índexs varien entre 1 i n , mentre que allí variaven entre 1 i 2. Tots els altres càlculs poden obtenir-se automàticament a la manera del número 6, per a arribar a les noves equacions intrínseques del paral·lelisme que defineixen els increments $du^{(i)}$ dels paràmetres de direcció quan es passa per $P.V_n$ de P a P_1 :

$$(I) \quad du^{(i)} + \sum_{j,l}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} u^{(j)} dx_l = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

de forma idèntica a la (7) ja establerta per V_2 . Naturalment, aquí els símbols de Christoffel vénen en funció de les a_{ij} que intervenen en l'expressió de ds^2 en V_n .

De la (I) pot passar-se sigui a l'equació diferencial d'un transport $P.V_n$ al llarg d'una corba donada T , sigui al transport per equipol·lència de vectors qualssevol (no unitaris). El sistema diferencial lineal, generalitzant de (7') és:

$$(I') \quad \frac{du^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} u^{(j)} x'_l = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

sistema reductible a una forma típica anomenada a de-

terminant hemisimètric que s'ha presentat en altres recerques de cinemàtica i dinàmica, havent estat objecte d'estudi sistemàtic de part de Eiesland,⁽¹⁾ Laura,⁽²⁾ Darboux,⁽³⁾ Vessiot.⁽⁴⁾

L'estudi directe del sistema (I') i del seu adjunt porta a demostrar per via analítica les propietats del paral·lisme en una V_n que per la V_2 es dedueixen directament de la definició geomètrica: conservació dels angles relatius quan diverses direccions es transporten al llarg del mateix camí; conservació de la llargada o amplitud dels vectors; autoparal·lisme de les geodèsiques, etc. Com a exemple comprovarem l'autoparal·lisme referint per a la resta als capítols 5 i 6 de la memòria esmentada en el núm. 7 (pàg. 94).

Les equacions de segon ordre que defineixen totes les geodèsiques de V_n per a les quals $\delta ds = 0$ són

$$x_i'' + \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} x_j' x_i' = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

en les quals la variable independent és l'arc s . Si es comparen amb les (I') es veu tot seguit que, en fer el transport al llarg de la geodèsica, la (I') són idènticament satisfetes per

$$u^{(i)} = x_i'.$$

És a dir que tota geodèsica es manté paral·lela a si mateixa, o, d'altra manera, la direcció d'una geodèsica es conserva en tot punt paral·lela a la direcció inicial.

1. *American Journal of Math.*, vol. XXVIII (1906), pp. 17-42.
2. *Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino*, vol. XLII (1906-1907), pp. 1089-1108; vol. XLIII (1907-1908), pp. 358-378.
3. *Comptes Rendus*, t. CXLVIII (primer semestre 1909), pp. 16-22, 673-679, 745-754.
4. *Ibidem*, pp. 332-335.

IO. TEOREMA DE SEVERI

Donats que siguin P , P_1 i u podem considerar dins V_n el full determinat per les dues direccions (que suposem diferents) PP_1 i u . Així mateix atendrem a la superfície geodèsica γ de pol P tangent al dit full. La u es pot transportar de P a P_1 per paral·lelisme en la V_n i també per paral·lelisme en la γ . Severi ha demostrat que en tots dos casos s'obté la mateixa direcció. Sense necessitat de càlcul es pot demostrar observant que la coincidència és evident en el cas d'ésser V_n euclídia, en què γ es redueix al pla de PP_1 i u . Si V_n és qualsevol podem considerar-la referida a un sistema de coordenades geodèsiques de pol P ,⁽¹⁾ en el qual cas, per ser $\{^i_i\}$ igual a zero, tant les equacions del paral·lelisme com les de les geodèsiques que eixin de P , es redueixen a la forma elemental que els correspon en una varietat euclídia. Ara bé : com que les paral·leles a u traçades per P_1 , tant la relativa a V_n com la relativa a γ , depenen de les equacions del paral·lelisme i de les geodèsiques amb valors de $\{^i_i\}$ en l'únic punt P , la coincidència de les dues paral·leles, evident per la V_n euclídia, és extensiva a V_n qualsevol.

1. S'entenen per tals les curvil·línies $x_1, x_2, \dots, x_n$, que en la immediata proximitat de P es comporten per a la mètrica de V_n , és a dir, per l'expressió de ds^2 com si fossin coordenades cartesianes, ço és, que els coeficients a_{ih} que els corresponen, si bé no són constants, adopten en P valors estacionaris, és a dir, tals que a P totes les derivades de $\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_i}$ i, per tant, els símbols de Christoffel s'anul·lin.

II. ALGUNES FÓRMULES

Siguin q_1 i q_2 variables (reals) independents, C un camp finit de valors d'aquelles, T el seu contorn, $f(q_1, q_2)$ una funció finita i contínua en C incloent-hi T , i finites i contínues les seves derivades primeres. Són ben conegudes les següents fórmules de transformació, en les quals el sentit de recorregut del contorn és fixat *a priori*:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_C \int \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 dq_2 = \int_T f dq_1, \\ \int_C \int \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_1 dq_2 = - \int_T f dq_1. \end{array} \right.$$

Ordinàriament, q_1 i q_2 s'interpreten com a coordenades cartesianes d'un cert pla de representació, i el sentit es fixa de tal manera que la direcció de propagació faci amb la normal interna n un sistema de dos eixos congruent amb els coordenats. Poden eliminar-se els eixos, substituint-los un criteri local, vgr., el de pendre en son lloc dues línies $q_1 = \text{constant}$, $q_2 = \text{constant}$, eixides d'un punt del contorn i en el sentit en què creix en els paràmetres q_1 o q_2 . Aquest conveni per a fixar el signe del contorn té l'aventatge de poder interpretar q_1, q_2 com a coordenades curvilínies no sols en el pla, sinó també sobre una superfície o varietat V_2 de mètrica qualsevol; les identitats (17) subsisteixen sempre, naturalment.

Una segona observació serà útil en referir-nos a

l'element d'àrea d'una varietat de dues dimensions compresa en V_n de mètrica definida per

$$ds^2 = \sum_i^n a_{ik} dx_i dx_k .$$

Suposem concretament que es tracta d'una superfície σ o un tros de superfície σ de V_n definida paramètricament per

$$(18) \quad x_i = x_i(q_1, q_2) \quad (i = 1, 2, \dots, n) .$$

Si a partir d'un punt P de σ (és a dir, d'un parell de valors donats de q_1, q_2) es fa variar solament q_1 donant-li un increment dq_1 , hom es desplaça sobre la línia $q_2 = \text{const.}$ i les x_i reben increments

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) .$$

De semblant manera, variant tan sols q_2 , hom es desplaça sobre la línia $q_1 = \text{const.}$ amb increments per a les x_i :

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 .$$

Les llargades ds i δs dels dos desplaçaments són

$$ds = \rho_1 dq_1 \quad , \quad \delta s = \rho_2 dq_2 ,$$

en les quals

$$(19) \quad \rho_1^2 = \sum_i^n a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_1} , \quad \rho_2^2 = \sum_i^n a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} .$$

A ρ_1 i ρ_2 se'ls atribuirà el signe de dq_1 i dq_2 , respectivament.

Els paràmetres corresponents són

$$\xi^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}, \quad \eta^{(i)} = \frac{\delta x_i}{\delta s}.$$

i valen

$$(20) \quad \xi^{(i)} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \quad \eta^{(i)} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

En la mètrica de V_n , les dues direccions de paràmetres $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$, o, per dir més abreujadament, les dues direccions ξ, η , formen un angle δ definit per

$$\cos \delta = \sum_i^n a_{ih} \xi^{(i)} \eta^{(h)}.$$

En la mètrica subordinada, en la superfície σ , la determinació de l'angle entre les dues direccions és la mateixa, i fóra fàcil transformar l'expressió de $\cos \delta$, de manera que no hi haguessin més que elements intrínsecs de la mètrica de σ . Mes ara no farem altra cosa que expressar, gràcies a la noció geomètrica, l'àrea infinitesimal $\Delta\sigma$ del quadrangle determinat per dos parells de línies coordenades $q_1 = \text{const.}$, $q_2 = \text{const.}$ i les immediatament veïnes. Aquest quadrangle és assimilable a un paral·lelogram de costats $ds, \delta s$, que formen entre si l'angle δ . L'àrea n'és $ds \delta s \sin \delta$, o sia

$$(21) \quad \Delta\sigma = \rho_1 \rho_2 \sin \delta \, dq_1 dq_2.$$

12. TRANSPORT CÍCLIC D'UNA DIRECCIÓ. CAS D'UN CICLE INFINITÈSIM. DIFERÈNCIA ANGULAR. FÓRMULA DE PÉRÈS.

Schouten,⁽¹⁾ amb els seus mètodes vectorials, i independentment d'ell Pérès,⁽²⁾ han evidenciat la importància que té, per a caracteritzar les propietats geomètriques d'una V_n , el transport d'una direcció al llarg d'un cicle tancat. Per a l'estudi de les propietats locals en un punt P, la consideració del cicle infinitesimal presenta grans aventatges. Indicaré el tractament de Pérès amb lleugeres modificacions en el desenrotllament del càlcul.

Sigui u la direcció de paràmetres $u^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, n$) que es vol transportar al llarg d'un cicle qualsevol T que surt de P i torna a P. Designant per dx_k ($k = 1, 2, \dots, n$) les diferencials de les coordenades corresponents a un element dT del cicle, les $u^{(r)}$ incrementen de $du^{(r)}$ en el transport elemental $P.V_n$ al llarg de dT . Les valors de les $du^{(r)}$ donades per la (I) podran escriure's

$$du^{(r)} = - \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ i \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} dx_k \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Els increments totals $\Delta u^{(r)}$ relatius al cicle sencer, és a dir, les diferències $\bar{u}^{(r)} - u_P^{(r)}$ entre els valors d'arribada $\bar{u}^{(r)}$ i els de partida $u_P^{(r)}$, seran

$$(22) \quad \Delta u^{(r)} = - \int_T \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ i \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} dx_k \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

1. *Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie*, *Verhandlungen der K. Ak. van Wet. te Amsterdam*, 1919, Decl. XII, núm. 6; cfr. en particular pp. 67-71.

2. *Le parallélisme de M. Levi-Civita et la courbure riemannienne*, *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XXVII (primer semestre 1919), pp. 425-428.

Imaginem que per T passa un element superficial σ , del qual T sigui el contorn complet. La representació paramètrica d'aquesta σ vindrà expressada per (18), essent C el camp de variabilitat dels dos paràmetres q_1 i q_2 (vegeu el capítol anterior). Sobre de σ , i, per tant, en el contorn T, les (18) donen

$$(18') \quad dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} dq_2.$$

Escrivint per senzillesa

$$Q_1^{(r)} = - \sum_i^n i_k \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_1}, \quad Q_2^{(r)} = - \sum_i^n i_k \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_2},$$

la valor de $\Delta u^{(r)}$ es pot escriure

$$(22') \quad \Delta u^{(r)} = \int_T (Q_1^{(r)} dq_1 + Q_2^{(r)} dq_2).$$

Les $u^{(r)}$ de les quals suposem coneguts a P els valors inicials $u_P^{(r)}$, queden definides pel transport per paral·lelisme en tot punt de T; mes en l'interior del camp C limitat per T cal examinar-ho prèviament. En general, com que les equacions de paral·lelisme no són il·limitadament integrables, els valors de les $u^{(r)}$ en un punt Q de C (deduïts per paral·lelisme a partir de $u_P^{(r)}$) depenen de Q i del camí seguit per a passar de P a Q. Mes si el camp C és infinitesimal i prescindim dels infinitament petits d'ordre segon respecte de la màxima dimensió del camp, s'opera ja amb diferencials exactes.

En tal cas, la diferència entre les coordenades superficials q_1, q_2 de P i les del punt Q de C poden presentar-se sota la forma dq_1, dq_2 , és a dir, són infinitesimals. Per

la (18') s'esdevé el mateix amb les diferències dx_k entre les coordenades de dos punts de V_n . Resultant així per la $u^{(r)}$ en el punt Q les valors $u_Q^{(r)}$ provinents del transport elemental P.V., a partir de P, això és, $u^{(r)} + du^{(r)}$; de tal manera que en les $du^{(r)}$ s'atribueixi a les $u^{(i)}$ el mateix que als símbols de Christoffel llur determinació en P.

Ja en aquest ordre d'aproximacions, les $u_Q^{(i)}$ són assimilables a funcions uniformes del punt Q (lineals en dq_1, dq_2) finites i contínues, així com les derivades primeres per respecte a q_1, q_2 . En el cas d'un camp C infinitesimal podem, doncs, considerar les $Q_1^{(r)}, Q_2^{(r)}$ com a funcions finites i contínues, junt amb les derivades respecte a q_1 i q_2 . Essent així les funcions $Q_1^{(r)}$ i $Q_2^{(r)}$, són aplicables les fórmules (17), i a la integral de contorn en la (22') podrà ser substituït un integral estès al camp C

$$(22'') \quad \Delta u^{(r)} = \int_C \int dq_1 dq_2 \left[\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2} \right].$$

En el càlcul de les derivades de Q respecte a q_1 i q_2 cal recordar que els símbols de Christoffel depenen de les q mitjançant de les x, i , per tant, per les equacions (18), mentre les derivades de les $u^{(i)}$ vénen donades per les equacions de paral·lelisme (I) referides, com s'ha vist, al punt P.

Escrivim de nou la (I)

$$du^{(i)} = - \sum_1^n l_h \left\{ \begin{matrix} lh \\ i \end{matrix} \right\} u^{(i)} dx_h$$

Variant solament q_1 , es dedueix

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial q_1} = - \sum_1^n l_h \left\{ \begin{matrix} lh \\ i \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1}$$

Altres se'n trobaria semblant fent variar solament q_2 . Adoptant aquestes valors per a les derivades de les $u^{(i)}$, i sobreentenenent que tot ve referit a P (un cop feta la derivació), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} &= - \sum_i^n \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} - \\ &- \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} - \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_2} = \\ &= - \sum_i^n \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} + \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lh \\ i \end{matrix} \right\} u^{(l)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} - \\ &- \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_2}, \end{aligned}$$

o bé canviant i per l en la segona suma i traient factor comú $u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} &= - \sum_i^n u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \left[\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} - \sum_l^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lh \\ i \end{matrix} \right\} \right] - \\ &- \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_2}. \end{aligned}$$

Per a tenir l'expressió de $\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_2}$ bastarà el canvi de q_1 i q_2 en el segon membre ja escrit. Convindrà també permutar, en la primera Σ , h per k , la qual cosa no al-

tera la valor, sinó sols l'aspecte formal. En la diferència

$$\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2}$$

s'eliminen així els últims sumands, podent treure en els primers com a factor comú

$$u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}.$$

Recordant ara la definició dels símbols de Riemann de segona espècie

$$\{ir, hk\} = \frac{\partial \{ih\}_r}{\partial x_k} - \frac{\partial \{ik\}_r}{\partial x_h} + \sum_i^n \left[\left\{ \begin{matrix} ih \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lk \\ r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lh \\ r \end{matrix} \right\} \right].$$

resulta

$$\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2} = \sum_i^n \{ir, hk\} u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}.$$

Tenint en compte que C és infinitesimal, la integral que figura en el segon membre de (22'') pot quedar reduïda a l'element únic que es troba a l'entorn de P . Com que és coneguda l'expressió de la funció sota del signe, és a dir, $\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2}$ pel punt P , despreciant indefinidament petits d'ordre superior a l'element $dq_1 dq_2$, tindrem:

$$(23) \quad \Delta u^{(r)} = dq_1 dq_2 \sum_i^n \{ir, hk\} u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}.$$

Amb els símbols de primera espècie de Riemann $a_{ij, hh}$ definits per

$$\{ir, hh\} = \sum_i^n a^{(r)}_{ij} a_{ij, hh} \dots$$

la (23), tenint presents les (20) i (21) del número precedent, dóna:

$$(23') \quad \Delta u^{(r)} = \frac{\Delta \sigma}{\sin \delta} \sum_{ij, hh}^n a^{(r)}_{ij} a_{ij, hh} u^{(i)} \xi^{(h)} \eta^{(k)}.$$

Aquests són els increments dels paràmetres $u^{(r)}$ d'una direcció u en el transport $P.V_n$ al llarg d'un cicle infinitesimal que comença i acaba a P .

En la (23') intervé el cicle de transport pels tres elements geomètrics que el caracteritzen, i són: les dues direccions qualssevol ξ, η que determinen el full en el qual es suposa traçat el cicle T , l'angle δ comprès entre elles, i l'àrea $\Delta \sigma$ del cicle mesurada en la mètrica de V_n .

De la (23') és dedueix tot seguit la fórmula fonamental que serveix per a establir la relació entre paral·lelisme i curvatura. Suposem una quarta direcció qualsevol v eixint de P i de paràmetres $v^{(i)}$. Sigui α l'angle entre u i v , i examinem la variació del seu cossinus quan u es transporta per paral·lelisme al llarg del cicle que es considera.

Posant, per simplificar,

$$v_r = \sum_i^n a_{ri} v^{(i)}$$

(en la qual expressió, v_r són els anomenats moments de

la direcció v), la fórmula del cossinus de l'angle de dues direccions, establerta en el número precedent, dóna

$$\cos \alpha = \sum_r^n u^{(r)} v_r .$$

Considerant successivament la determinació (arbitrària) inicial i la d'arribada, i restant-les

$$\Delta \cos \alpha = \sum_r^n \Delta u^{(r)} v_r .$$

Introduint per a les $\Delta u^{(r)}$ les expressions (23'), i observant que $\sum_1^n a^{(rj)} v_r = v^{(j)}$, resulta la fórmula de Pérès

$$(24) \quad \frac{\Delta \cos \alpha}{\Delta \sigma} = \frac{1}{\sin \delta} \sum_i^n a_{ij, hh} u^{(i)} v^{(j)} \xi^{(h)} \eta^{(h)}$$

essent δ l'angle entre ξ i η .

13. RELACIONS ENTRE PARAL·LELISME I CURVATURA

De la definició dels símbols de Riemann resulta immediatament

$$\{ir, hk\} = - \{ir, kh\} .$$

i, per tant,

$$a_{ij, hh} = - a_{ij, hh}$$

De la fórmula de Pérès es poden deduir sense càlcul les relacions

$$a_{ij, hh} + a_{ih, hj} + a_{jh, ih} = 0 ,$$

que, combinades amb les precedents, exhausteixen completament les propietats algèbriques dels símbols de Riemann, portant, com a conseqüència, les identitats:

$$a_{ij, kk} = a_{kk, ij} = -a_{ji, kk}^{(1)}.$$

Sense detenir-me en aquest punt faré observar que, si les dues direccions u i v es permuten, el segon membre de (24) canvia de signe i, per tant, també $\Delta \cos \alpha$, la qual cosa, geomètricament, no és cosa d'evidència. I com a corol·lari, que si v i u són coincidents, $\Delta \cos \alpha = 0$, ço que és evident, perquè essent $\Delta \alpha$ infinitament petit, $\Delta \cos \alpha = -\sin \alpha \Delta \alpha$, i la determinació α de l'angle inicial, en aquest cas és zero.

Per demostrar la importància fonamental de la (24) en relació amb la curvatura de V_n , començarem per aplicar-la al cas elemental de la superfície, $n = 2$. Els símbols de Riemann s'anul·laran o queden reduïts a l'esquema $a_{12, 12}$. És sabut que, introduint el discriminant de la forma que expressa ds^2 :

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

la curvatura K de Gauss per a V_2 val

$$K = \frac{a_{12, 12}}{a}.$$

Per altra part, la (24), en la qual ξ, η es suposin coincident amb u, v , i, per tant, δ amb α , es redueix a

$$\frac{\Delta \cos \alpha}{\Delta \sigma} = \frac{a_{12, 12}}{\sin \alpha} \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}^2.$$

1. V. RICCI : *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori. Nota seconda. Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XIX (segon semestre 1910), pàg. 86.

Observi's que el producte dels dos determinants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix} ,$$

fet per files, dóna:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

en què

$$u_i = \sum_k^2 a_{ik} u^{(k)} , \quad v_i = \sum_k^2 a_{ik} v^{(k)}$$

són els moments de les direccions u , v . Multiplicant el nou determinant per

$$\begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}$$

sempre per files, i recordant que

$$\sum_i^2 u_i u^{(i)} = 1 , \quad \sum_i^2 v_i v^{(i)} = 1 ,$$

$$\sum_i^2 u_i v^{(i)} = \sum_i^2 u^{(i)} v_i = \cos \alpha$$

es reconeix que

$$a \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha .$$

De manera que, per ser $\Delta \cos \alpha = -\sin \alpha \Delta \alpha$, resulta finalment

$$(25) \quad -\frac{\Delta \alpha}{\Delta \sigma} = \frac{a_{12},_{12}}{a} = K ,$$

de la qual i de l'originària definició de α (com angle $< \pi$ entre u i v) és fàcil deduir una nova interpretació de la curvatura gaussiana d'una superfície: Sobre d'una superfície qualsevol transporti's per paral·lelisme una direcció u , eixida d'un punt P , al llarg d'un cicle tancat. Sigui $\Delta\sigma$ l'àrea del cicle, $-\Delta\alpha$ l'angle entre les dues determinacions de u , de la inicial a la final en el sentit de rotació corresponent a la direcció de propagació al llarg del cicle.

La curvatura K en el punt P és $-\frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}$.

Si es considera en particular com a cicle tancat un triangle geodèsic (infinitesimal) s'arriba al cèlebre teorema de Gauss sobre els triangles geodèsics i la curvatura íntegra en el cas límit d'un triangle elemental.

Sigui ara una V_n qualsevol. Fixades u i v , considerem el full que els conté i la superfície geodèsica γ de pol P tangent al dit full. Prenent ξ i η com a coincidents amb u , v , i observant que, pel teorema de Severi, al llarg del cicle infinitèsim les paral·leles a u en V_n són paral·leles també sobre γ , es reconeix que $-\frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}$ representa la curvatura K de γ en P , i la fórmula (24) dóna

$$(26) \quad K = -\frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sum_{i,j,h,k}^n a_{ij,hk} u^{(i)} v^{(j)} u^{(h)} v^{(k)}$$

Segons la definició de Riemann, aquesta K és la curvatura de V_n segons el full u , v .

Per altra part, el paral·lelisme al llarg del cicle es pot referir directament a la V_n , i dóna sota la forma

$$-\frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}$$

(respecte a la superfície geodèsica auxiliar), una interpretació expressiva de la curvatura K .

De la simetria del segon membre de (26) respecte de u , v es conclou que, si es transporta v en lloc de u al llarg del mateix cicle, la variació de l'angle és sempre $\Delta\alpha$.

Aquestes consideracions fan comprendre com, des del punt de vista metodològic, convé pendre, per a amidar la curvatura corresponent a una V_u en un punt donat d'ella, i segons un full determinat, la relació:

$$- \frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}.$$

La definició ordinària es dedueix després sense càlcul.

Per a ulteriors desenrotllaments em limitaré a referir al lector a la ja esmentada memòria del T. LII del Circolo Matematico di Palermo.

CONFERÈNCIA IV

L'OPTICA GEOMÈTRICA I LA RELATIVITAT GENERAL D'EINSTEIN

En els primers mesos de l'any 1920 s'han conegut els resultats de les observacions empreses amb ocasió de l'eclipsi del 29 de maig de 1919 amb la finalitat de mesurar la petitíssima curvatura (direm *deflexió*, seguint als astrònoms anglesos) que, segons la relativitat general d'Einstein, devien experimentar els raigs de llum provinents dels estels quan passen per les proximitats del Sol.

La deflexió efectivament consignada va ésser conforme a les previsions de la teoria, constituint d'aquesta manera una prova experimental, en certa faísó més brillant encara, si no més decisiva, que la ja oferta per l'explicació de l'èxit negatiu de l'experiment de Michelson i del desplaçament secular del periheli de Mercuri. En aquests dos últims casos es tractava, en efecte, de donar raó de fenòmens ja observats (per més que fossin inútilment investigats a la llum dels ordinaris principis de la mecànica), mentre que la deflexió dels raigs és un fet nou, primerament anunciat per la teoria i després comprovat per l'experiència. Tal volta per aquesta raó l'interès suscitat entre els entesos pel memorable descobriment d'Einstein⁽¹⁾

1. És convenient fer notar que Einstein va trobar la necessària base matemàtica per a la seva relativitat general en el càlcul diferencial absolut, creat i elaborat, els últims trenta anys, pel Prof. G. Ricci, de la Universitat de Pàdua. Un exemple tan conspicu d'especulacions abstractes, que ha vingut a ésser, en un moment donat, essencial al progrés de la filosofia natural, potser es troba solament en la teoria de les còniques d'Apoloni, que va fer possible el descobriment de les lleis de Kepler.

va començar a difondre's en tots els ambients científics, solament en recerca de la confirmació astronòmica de la curvatura dels raigs estelars, i tingué prompta repercussió en un públic més nombrós.

Treballs anàlegs han estat, naturalment, dedicats a aquest argument en llibres, revistes i diaris : algun, tindrà ocasió d'esmentar-lo; dels altres em limito a assenyalar l'excel·lent memòria de Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi* (*Nuovo Cimento*, juliol 1917, pàgs. 12-54).

I

INVOCACIONS A L'ÒPTICA GEOMÈTRICA SEGONS L'ESQUEMA CLÀSSIC

1. *Generalitats. — Lleis de la refracció. — Principi de Fermat.* — En un medi transparent, homogeni, la llum s'hi propaga evidentment en línia recta amb velocitat constant. En el cas de la isotropia, al qual exclusivament ens referirem, la velocitat és sempre la mateixa en totes les direccions, i constitueix, per això, una constant característica del medi. Per a l'aire (i així mateix sensiblement per als espais interplanetaris) aquesta constant val en xifres rodones

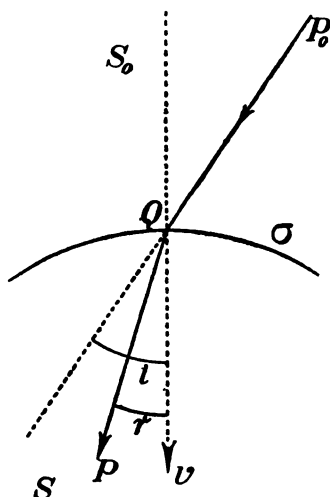
$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm. seg.}$$

o sia 300,000 km. per segon.

Si es tracta d'un medi heterogeni en el qual l'índex de refracció n , que és, demés, l'invers de la velocitat de propagació, varia de punt a punt, aleshores els raigs no tenen, en general, la marxa rectilínia, sinó que són corbs segons

una llei que depèn de la manera de variar de n amb el lloc, això és de la funció $n(x, y, z)$, designant, com de costum, x, y, z les coordenades cartesianes d'un punt general del medi.

Heu's aquí per quines consideracions s'és conduït a caracteritzar la marxa dels raigs.



Es parteix del cas elemental d'un medi il·limitat que consta de dues parts S_0 i S , cadascuna homogènia (separadament considerada), però que tenen dos diversos índexs de refracció n_0, n . Sigui σ la superfície de separació entre S_0 i S . A dintre de S_0 tot raig té marxa rectilínea, i així mateix dintre de S . Per això, en passar d'un punt general P_0 de S_0 a altre punt, també general, P de S , la llum segueix un camí format de dues parts rectilínies P_0Q de P_0 a un cert punt Q (desconegut a priori) de σ ; i QP . Les lleis experimentals de la refracció, a través de la superfície de separació σ , diuen, demés, que els dos segments

P_0Q , QP no estan, en general, en línia recta; no obstant, estan en un mateix pla amb la normal v a la superfície en Q , la ubicació de Q essent tal que satisfà la coneguda llei (de Descartes)

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n}{n_0},$$

en la qual i i r signifiquen els angles formats pel raig incident i pel raig refractat, respectivament, amb la normal v a la superfície σ en Q (raig i normal s'entenen orientats en el sentit de la propagació).

Ara bé : aquestes lleis geomètriques són incloses en el principi de Fermat del temps mínim. Si, en efecte, se cerca quin sigui el camí entre P_0 i P al llarg del qual la llum es propaga en el temps més breu, es veu en primer lloc, immediatament, que en cadascuna de les dues parts S_0 i S (dintre les quals la velocitat és constant) un tal camí mínim deu ésser rectilini. Així, doncs, tot es redueix a individuar la posició de Q damunt de σ , a base de la condició que resulti mínima la suma

$$t = n_0 \overline{P_0Q} + n \overline{QP}$$

dels dos temps que la llum gasta per a recórrer el segment P_0Q (amb la velocitat $\frac{1}{n_0}$) i el segment QP (amb la velocitat $\frac{1}{n}$). En condicions de mínim deu ésser $\delta t = 0$, i un càlcul fàcil porta de seguida a reconèixer que això implica immediatament les lleis de Descartes.⁽¹⁾

1. Cfr., per exemple, APPELL : *Traité de mécanique rationnelle* (3.^e ed., Paris, Gauthier-Villars, 1909). T. I, Cap. VII, n.^o 150, pàgines 220-223.

2. *Medi constituït per diverses capes homogènies. — Cas límit. — Fórmula de variacions a què dona lloc el principi de Fermat.* — Això mateix passa més generalment si el medi consta de qualsevol nombre, diem $m + 1$, de parts homogènies, estan interposades $m - 1$ capes intermèdies, entre S_0 i S , separades l'una de l'altra per superfícies successives $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. Els índexs de refracció siguin, respectivament, les constants $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, n$.

Per anar de P_0 a P , un raig haurà de travessar les diverses σ en punts (a priori no coneguts) $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$. El principi de Fermat exigeix, en primer lloc, que aquest raig sigui constituït per una línia de segments rectilinis $P_0Q_1, Q_1Q_2, \dots, Q_{m-1}Q_m, Q_mP$. La ubicació dels punts Q serà, demés, caracteritzada per la condició de fer mínima la duració total del trajecte, o sia el temps

$$t = n_0 \overline{P_0Q_1} + n_1 \overline{Q_1Q_2} + \dots + n_{m-1} \overline{Q_{m-1}Q_m} + n \overline{Q_mP}.$$

També aquí es fa veure amb facilitat que per $\delta t = 0$ les refraccions successives obeeixen totes a les lleis de Descartes. Per això el principi de Fermat, o també sols la part d'aquest principi que expressa les condicions diferencials necessàries per al mínimum, o sia la fórmula

$$\delta t = 0,$$

apareix com una oportuna síntesi dels fets observats.

El cas més interessant d'un medi heterogeni en el qual n varia amb continuïtat de punt a punt es pot òbviament pendre com a límit de l'estratificació discreta que acabem de considerar. Basta, per un moment, imaginar, en el medi donat, un cert nombre de superfícies de la família

$$n(x, y, z) = \text{Const.},$$

suficientment veïnes perquè de l'una a l'altra d'elles la n mantingui sensiblement constant. En un medi hipotètic en el qual la n fos rigorosament constant dintre de cada capa, sofrint, en canvi, bruscos salts al través de les superfícies que els separen, la marxa del raig fóra una línia poligonal recta segons el principi de Fermat. Això porta, en passar al límit quan el nombre de les capes creix indefinidament, a admetre igualment que continua essent vàlid el mateix principi també en el cas d'un índex de refracció $n(x, y, z)$ variable amb continuïtat. Ara, si indiquem amb ds l'element d'arc d'un raig general de llum propagant-se en el medi, nds representa manifestament el diferencial de temps emprat per la llum per a recorre ds , i el principi de Fermat es tradueix en el fet analític que la corba incògnita que segueix el raig lluminós entre dos punts prefixats P_0, P deu correspondre al mínim temps de recorreguda, o sia deu fer mínima la integral $\int_{P_0 P} nds$. Prescindint, com abans, de les especificacions qualitatives addicionals que es requereixen per a un mínim *effectiu*, i limitant-nos a expressar que s'anul·la la primera variació, podem inferir que *l'òptica geomètrica d'un medi en el qual $n(x, y, z)$ és una funció qualsevulla del lloc (continua i derivable) roman substancialment compendiada en la fórmula de variacions:*

$$(1) \quad \delta \int nds = 0 .$$

D'aquesta es trobarien fàcilment (amb el sols algorisme del càlcul de les variacions) les equacions diferencials (equivalents) aptes per a proporcionar, mitjançant la integració, la forma efectiva dels raigs (entre dos punts qualssevol del medi). Però és preferible, en atenció a les consideracions que em proposo desenrotllar després,

fugir del càlcul directe, aprofitant-se, en canvi, d'una coneguda equivalència dinàmica.

3. *Trajectòries dinàmiques en els problemes conservatius.* — *Feix corresponent a un determinat valor de la constant de les forces vives.* — *Equacions diferencials del feix.* — *Principi de la mínima acció.* — Consideri's un punt material (x, y, z) , el qual es mou sota l'acció d'una força conservativa. Segui

$$U(x, y, z)$$

el potencial d'aquesta força, unitari, o sia referit a la unitat de massa del punt d'aplicació. Soposant que els eixos de referència siguin fixos (en el sentit ordinàriament atribuït en mecànica a tal qualificatiu), es té, per caracteritzar el moviment del punt, l'equació (vectorial) fonamental de la mecànica : acceleració = força unitària, o sia, projectant damunt els tres eixos:

$$(2) \quad \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad ,$$

els punts posats al damunt indiquen, segons la notació anglesa, derivació respecte del temps t .

Les equacions (2) admeten evidentment la integral (de les forces vives)

$$(3) \quad \frac{1}{2} v^2 - U = E$$

en què $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ representa el quadrat de la velocitat del mòbil, i la constant de les forces vives E

l'energia total (de moviment i de posició, o sia, actual i potencial) que li pertoca per unitat de massa.

A les (2) equivalen les anomenades *equacions intrínseques*, que provenen de la mateixa equació vectorial ja recordada, projectant damunt de la tangent a la trajectòria, de la normal principal N i de la binormal B.

La primera es pot imaginar substituïda per la relació integral (3). Les altres dues, recordant que les components de l'acceleració segons N (cap a la concavitat de la trajectòria) i segons B valen, respectivament, $\frac{v^2}{\rho}$ (ρ radi de curvatura) i 0, s'escriuen

$$(4) \quad \frac{v^2}{\rho} = \frac{dU}{dN}, \quad 0 = \frac{dU}{dB},$$

els segons membres essent evidentment derivades de direcció del potencial U segons les direccions N i B (desconegudes *a priori*).

Si es tenen en compte les (3), es pot considerar v^2 (introduït originàriament com quadrat de la velocitat del mòbil) com una funció coneguda del lloc. Per altra banda, en els segons membres de les (4) es pot també escriure, en lloc de U, $U + E$, o sia, $\frac{1}{2} v^2$. Amb l'accepció així atribuïda a v^2 desapareix el temps, i romanen solament elements geomètrics. En altres termes : s'obté el resultat de l'eliminació de t de les equacions del moviment, o sia les equacions diferencials que defineixen totes les possibles trajectòries, en el camp de forces derivat d'un donat potencial $U(x, y, z)$, sota la forma

$$(4') \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dN} = \frac{v^2}{\rho}, \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dB} = 0,$$

essent v^2 lligada amb U per la (3), amb E constant arbitrària

Imaginem, en particular, d'atribuir a E un valor ben determinat, amb la qual cosa també v^2 roman unívocament individuat en funció del lloc. Les (4') defineixen llavors, no ja totes les trajectòries, sinó solament un *feix* llur, anomenant-se ara *feix* el conjunt de trajectòries que corresponen a un mateix valor de la constant E . Les mateixes (4') són en definitiva dues equacions diferencials de segon ordre entre x , y , z i per això llur integració introdueix quatre constants arbitràries, i un feix consta, en conseqüència, de ∞^4 trajectòries. La totalitat de les trajectòries, resultant del conjunt de tots els feixos, ve, per tant, a dependre de cinc constants : les quatre d'un feix general i la E (les quals són essencials, o sia no reduïbles a menys de cinc, exclòs solament el cas de U constant, o sia d'un camp de força nul).

Per al nostre objecte, o sia per evitar l'exposició directa del problema general de l'òptica geomètrica, subordinant la recerca dels raigs a la d'un feix de trajectòries d'un oportú problema dinàmic, és convenient recórrer, per altra banda, al principi de la mínima acció.

Aquest principi es tradueix analíticament en una equació de variacions (sense t) que per un donat valor de la constant E , compendia les equacions del corresponent feix de trajectòries. Ella expressa que s'anul·la la variació de l'acció relativa a l'arc de trajectòria comprès entre dos punts generals, essent definida l'acció com

$$\int \sqrt{2(U + E)} \, ds$$

estesa a l'arc de trajectòria de què es tracta.⁽¹⁾

1. APPELL : *loc. cit.*, cap. XV, n.º 220, pàgs. 543-544.

Abreuant l'escriptura, usant també v^2 , en lloc de la seva expressió explícita $2(U + E)$, es pot, en definitiva, retenir com equivalent a les (4') la fórmula de variacions

$$(5) \quad \delta \int v ds = 0 .$$

4. *Identitat entre els raigs lluminosos i els feixos de trajectòries dinàmiques.* — *Subordinació d'aquests a aquells.* — La (5) (mirant v , com realment és per causa de les (3), com a funció determinada de x, y, z) difereix de la (1) solament pel canvi de n en v . Basta, doncs, substituir n a v en les (4') per a tenir, sota la forma explícita:

$$(4'') \quad \frac{1}{2} \frac{d n^2}{dN} = \frac{n^2}{\rho} , \quad \frac{1}{2} \frac{d n^2}{dB} = 0$$

les equacions diferencials dels raigs lluminosos en un medi d'índex n .

A aquest criteri d'equivalència ve bé de donar una altra forma, que serà de més fàcil ús, encara que sigui menys definidora, perquè, al revés de les (4) i (4''), comprèn encara la variable auxiliar t . Consisteix en el següent enunciat:

Els raigs lluminosos en un medi d'índex de refracció variable $n(x, y, z)$ constitueixen altres tantes trajectòries dinàmiques d'un punt material subjecte a una força derivada del potencial $\frac{1}{2} n^2$. Per al problema dinàmic equivalent, la integral de les forces vives:

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} n^2 = \text{Const.}$$

té igual a zero la constant del segon membre, amb ço que la velocitat $v = n$.

La justificació és clara, perquè s'obté sense altra cosa la coincidència de (4') i (4'') per $v = n$.

La regla, així formulada, és molt còmoda, consentint interessants interpretacions òptiques de resultats ja ben assolits i àdhuc familiars en la seva forma mecànica. Considerem, per exemple, el cas típic a què dóna lloc en convenients condicions a l'anomenat emmirallament de Monge⁽¹⁾ d'un medi en el qual l'índex de refracció n varia solament amb la cota z . Prenguem la hipòtesi (que especialment té interès físic) d'una variació lenta. En tal cas podrem admetre, com a expressió de n en funció de z ,

$$n = n_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) ;$$

essent n_0 i h constants, i, demés, aquesta última (la qual és una llargaria) tal, que, en el domini dels valors de z que ocorre pendre en consideració, la relació $\frac{z}{h}$ es pot considerar com a quantitat de primer ordre. Es té llavors, menyspreant $\frac{z^2}{h^2}$ i anomenant g la constant $\frac{n_0^2}{h}$,

$$\frac{1}{2} n^2 = \frac{1}{2} n_0^2 \left(1 + 2 \frac{z}{h} \right) = \frac{1}{2} n_0^2 + gz .$$

Els raigs es confonen, per tant, amb trajectòries d'un problema dinàmic en el qual el potencial $\frac{1}{2} n^2$ és

1. Vegeu per exemple, A. GARBASSO : *Il miraggio* (*Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Tom. LVII, 1906, pàgs. 1-57).

funció lineal de z . Aquesta dependència lineal del potencial funció solament de z equival a dir que la força és paral·lela a l'eix z i té per valor (més adequadament per component unitària) g . Ens trobem, doncs (prescindint del divers valor numèric de g), en el cas elemental del moviment dels cossos pesats. Els raigs (quan no degeneren en rectes) seran altres tantes paràboles d'eix vertical, amb la concavitat en el sentit de la força, o sia en el sentit en què creix n . I així podríem seguir.

II

ENERGIA I MATÈRIA

COM ASPECTES DISTINTS D'UNA MATEIXA ENTITAT FÍSICA

5. *Fenòmens radioactius. — Energia intrínseca de la matèria. — Proporcionalitat entre la massa i l'energia i coeficient relatiu.* — La teoria electromagnètica de la llum ens ha habituat a considerar les vibracions lluminoses com a distintes de les oscil·lacions elèctriques en aspecte solament quantitatiu.

Una identificació encara més radical de quantitats físiques considerades fins ara com a independents (matèria i energia) ha estat suggerida, d'una manera espontània però encara tímida, pels fenòmens radioactius i s'és després vigorosament afermada com a conseqüència quasi ineluctable de les noves concepcions teòriques. Es tracta, abans de tot, de la constatació experimental que en els cossos radioactius es troba amagatzemada una descomunal quantitat d'energia. Per exemple, un gram de radi metàl·lic és capaç de desenrotllar (durant el curs de les seves transformacions) més de tres milions de calories grams. Aquesta energia, que es va desenrotllant durant

el procés de desintegració del radi, i de la mateixa manera de les altres substàncies radioactives, deu necessàriament ésser continguda, en una mesura no sospitada de primer antuvi, dintre de cada àtom d'aquesta substància. Com que, per altra banda, del punt de vista químic els cossos radioactius (fora de l'alt pes atòmic) no tenen caràcters especials, apareix racional la inducció que cada àtom de qualsevol element encabeix energia en mesura igualment conspícua, vull dir del mateix ordre de magnitud. Una apreciació quantitativa va ésser suggerida, per un camí enterament diferent, per la relativitat (fins la de la primera manera), lo qual porta per la força dels fets a admetre que les masses dels cossos varien (lleuissimament), ultra ab la velocitat, amb l'energia que porten, i precisament amb un augment $\frac{\Delta E}{c^2}$ si se'ls comunica una energia addicional ΔE .

Així s'ha obert via en la física moderna, i es pot retenir com adquirida independentment de qualsevol especial construcció teòrica, la consideració que l'energia i la matèria són necessàriament concomitants (energia = massa $\times c^2$) i que es poden mirar com a manifestacions distintes d'una mateixa entitat, la qual apareix com a matèria ordinària quan és, com si diguéssim, prou concentrada, mentre es nota en les formes més diverses com a energia quan no hi ha nuclis de condensació.

Això constitueix, evidentment, un reconeixement d'equivalència no menys grandíols que l'afirmat pel primer principi de la Termodinàmica. Ell es precisa en la dada quantitativa que c^2 és el factor de proporcionalitat entre la mesura d'una massa i la de l'energia concomitant, i per això es designa com a *principi* o *postulat d'equivalència*. Es pot també anomenar *principi d'identificació* (entre matèria i energia), o també *de materialització de l'energia*,

o, finalment, *d'inèrcia i pes* d'aquella. Aquestes últimes denominacions són justificades pel fet que, admesa la proporcionalitat entre energia i massa material, l'energia mateixa roman materialitzada, i per això dotada de les dues qualitats fonamentals que corresponen als cossos ponderables : inèrcia i pes, o sia, més generalment, aptitud per a experimentar l'acció gravitacional dels altres cossos.

6. *Conseqüències òptiques. — Curvatura dels raigs lluminosos dintre un camp de força.* — L'esquematització cinemàtica que hem recordat en el cap. I és suficient per al desenrotllament de l'Òptica geomètrica, mes no per al de l'Òptica física. L'explicació dels més complexos fenòmens d'interferència, de difracció, de polarització, etcètera, requereix notòriament una teoria que penetri quelcom més endins en l'anàlisi del fenomen. La teoria ondulatòria, que prové d'Huygens i es va afermar d'una manera definitiva amb Young i Fresnel, fou constituïda en forma satisfactòria, de primer antuvi, sota model elàstic (pres de les vibracions dels cossos sòlids); després, gràcies als treballs de Maxwell, amb model electromagnètic. Sia en aquesta teoria, avui universalment acceptada, sia en les anteriors teories elàstiques, s'identifiquen els raigs lluminosos amb les línies de fluxos de l'energia, essent la velocitat del fluxos l'experimentalment constatada per a la llum. Si s'associa a aquesta circumstància, ja fa temps adquirida, el postulat de proporcionalitat introduït en el nombre precedent, s'és necessàriament conduït a suposar que, al llarg de qualsevol raig, viatja matèria, encara que en quantitat tan petita (per causa de la petitesa del factor de proporcionalitat pel qual a

un *erg* correspon amb prou feines la fracció $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$

de gram), que resulta inapreciable en la major part dels casos. Mes, amb tot, sempre matèria.

Aquesta recentíssima materialització de l'energia permet substituir el concepte de propagació per ones i les conseqüents explicacions dels fenòmens concrets, ja que, des del punt de vista filosòfic, concilia la teoria ondulatòria amb l'antiga teoria de l'emissió.

Mes vegem quines conseqüències específiques es dedueixen del principi de proporcionalitat, quan es posa en les condicions més oportunes perquè pugui advertir la influència de la matèria (diluidíssima i velocíssima) que recorre cada raig.

Considerem per a això un medi transparent en el qual (en absència de qualsevol acció pertorbadora) la llum s'hi propagui amb velocitat constant c . Suposem que aquest medi sigui el domini d'un camp de forces i sigui $U(x, y, z)$ el potencial corresponent. Un punt material lliure que es mogui en aquest camp està subjecte únicament a la força derivada del potencial U i descriu per això trajectòries que, en general, no seran rectes, sinó corbes, essent, en un punt general, el raig de curvatura lligat al valor de U (en el dit punt) i a la velocitat del mòbil (també en el dit punt), per la primera equació de les (4). Ella mostra, entre altres coses, com és evident per altra banda, per intuïció, que, *caeteris paribus*, la trajectòria és tan menys corbada com major és la velocitat. Ara bé: si és veritat que els raigs lluminosos són efectivament trajectòries de partícules materials (sia, amb tot, tan ínfimes que fins ara s'han revelat a l'experiència — a l'experiència òptica, que és la més exquisita — amb soles característiques energètiques), cada una d'aquestes partícules ha d'obeir també a les lleis dinàmiques, i, per tant, a les (3) i (4), suposant despreciables les influències mútues, o sia que cada una es comporta com un punt material lliure.

Per altra banda, les mateixes lleis han de conformar-se, almenys amb gran aproximació, als fets observats en condicions ordinàries, els quals són : velocitat c i propagació rectilínia encara dintre el camp gravitatori terrestre i solar.

7. *Apreciació numèrica sobre el camp gravitatori en el sistema solar i sobre el presumible incurvament dels raigs luminosos.* — Podrem pràcticament donar-nos compte, assenyalant també la fórmula que en segona (i més que suficient) aproximació, pot ésser substituïda a la primera de les (4) com a mesura de la curvatura local.

Comencem per això considerant l'ordre de la magnitud de U que volem identificar amb el potencial newtonià dels camps pertanyents al sistema solar. A títol d'apreciació, podem referir-lo a cossos esfèrics, homogenis, o bé estratificats segons esferes concèntriques. Si R és el radi, M la massa i f la constant d'atracció, $\frac{fM}{R}$ representa el valor del potencial propi de la superfície; valor que es evidentment el més gran dels presos per U en els punts no interiors a l'esfera potenciant, ja que ella influeix en aquests punts com si tota la massa s'hagués condensat en el centre. Demés, respecte dels diversos cossos del sistema solar, el major valor numèric de $\frac{fM}{R}$ es té evidentment pel Sol. En qualsevol cas es tracta d'una quantitat [que té les dimensions d'un potencial unitari, i per això del quadrat d'una velocitat, com per altra banda apareix per la (3)] molt petita respecte de c^2 .

Calculem, en efecte, la relació $\frac{1}{c^2} \frac{fM}{R}$ pel Sol, tenint compte de $c = 3 \times 10^5$ km / seg i d'aquests altres dues

dades : *a*) el radi aparent del Sol (per a un observador terrestre a la distància mitjana), val en nombre rodó (error relatiu inferior a una mil·lèsima) 16'; *b*) la velocitat (mitjana) de la Terra en el seu moviment de translació al voltant del Sol val, també en nombre rodó (amb error inferior a una centèsima) 30 km. per segon.

Designant amb Δ la distància mitja Sol-Terra, serà $\frac{R}{\Delta}$ la mesura en radiants de l'angle 16', ja que

$$\frac{R}{\Delta} = 16 \frac{2\pi}{360 \cdot 60} = \frac{4\pi}{27 \cdot 10^2} ,$$

o sia

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{27 \cdot 10^2}{4\pi} = 214 .$$

Així mateix es té, per motiu de la dada *a*),

$$\frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} = \frac{\Delta}{R} \frac{1}{c^2} \frac{fM}{\Delta} = 214 \frac{1}{c^2} \frac{fM}{\Delta} .$$

Recordem, per altra banda, que, pel moviment en un cercle de radi Δ degut a l'atracció de la massa M situada en el centre, es té [per ex. per la primera de les (4)]

$$v^2 = \frac{fM}{\Delta} .$$

Aplicant aquesta relació al moviment orbital de la Terra i tenint compte de la dada *b*), podem escriure

$$\frac{1}{c^2} \frac{fM}{\Delta} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-8} ,$$

de la qual cosa es dedueix

$$(6) \quad \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} = 214 \cdot 10^{-8} = 2,14 \times 10^{-6}.$$

De què, com ja s'ha observat, en l'expressió del potencial U degut als cossos del sistema solar, el terme que es refereix a l'atracció del Sol pren un valor màxim en gran manera preponderant damunt els anàlegs màxims dels altres termes, es pot retenir que *en tot l'espai interplanetari, l'ordre de magnitud de $\frac{U}{c^2}$ és conforme a la (6), o sia de poques milionèsimes.*

Dintre d'aquesta aproximació, la (3) fa retrobar precisament la primera llei de l'Òptica geomètrica (velocitat de propagació = c). Basta, en efecte, atribuir a la constant E del segon membre el valor $\frac{1}{2} c^2$ per a tenir com expressió rigorosa de v :

$$v^2 = c^2 - 2U = c^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right),$$

d'on immediatament, despreciant $\frac{2U}{c^2}$ (que puja, a lo més, a unes poques milionèsimes) al costat de la unitat,

$$v = c, \quad q. v. d.$$

L'altra llei considerada fins ara com a fonament de l'Òptica geomètrica, és que (també dintre dels camps de forces com els que existeixen en els espais interplanetaris) els raigs tenen trajectòria rectilínia. Segons el postulat

admès, les trajectòries són, en canvi, definides per les (4), en les quals va substituït v^2 pel valor (3), o sia, amb l'aproximació ara especificada, el valor constant c^2 . Això consent sense més a reconèixer que, si la trajectòria no és rigorosament rectilínia, com proposa la física clàssica, se'n separa en quantitat quasi insignificant. En efecte, per la primera de les (4), en la qual s'escriu c^2 peu v^2 , es té

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{c^2} \frac{dU}{dN}$$

La derivada $\frac{dU}{dN}$ representa la força del camp en la direcció N, i per això no pot ésser major que la intensitat de tal força. Tornant a pendre el cas típic del Sol, que fixa l'ordre de la magnitud, es té la màxima intensitat a la mateixa superfície, es a dir:

$$\left| \frac{dU}{dN} \right| \leq \frac{fM}{R^2},$$

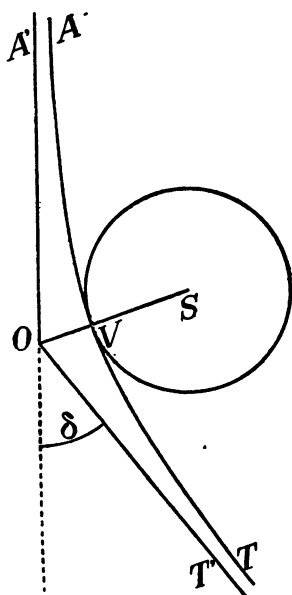
i, consegüentment,

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} \frac{1}{R}.$$

Els dos primers factors del segon membre valen, per raó de la (6), la petita fracció $2 \cdot 14 \times 10^{-6}$. Resulta, doncs, que $\frac{1}{\rho}$, o sia la curvatura dels raigs per efecte del camp gravitatori, no passa d'una tal petita fracció de $\frac{1}{R}$. En altres termes, el radi de curvatura, si no és exactament

infinit com per a les rectes, és, almenys, de l'ordre d'un milió de vegades el radi del Sol.

8. *Efecte angular màxim (deflexió) pels raigs arran la superfície solar. — Aplicació a un observador de la Terra. —*



La forma rigorosa dels raigs va naturalment definida per les (3), (4) amb $E = \frac{1}{2} c^2$. Es tracta, com hem advertit moltes vegades, de les equacions del moviment d'un punt material, en un camp conservatiu de potencial U . Si aquest prové d'una sola massa atraient (pensem específicament en el Sol), el problema és pròpiament el del moviment, d'un punt atret per un centre fix la integració del qual és deguda a Newton. Les trajectòries són clàs-

sicament còniques amb el focus en el centre de forces, l'espècie de la qual depèn del signe de la constant E . Per $E > 0$ (i tal és el nostre cas, en què E té el valor $\frac{1}{2}c^2$) es troba manifestament una hipèrbole. La circumstància qualitativa, ja assenyalada, que els raigs romanen molt poc corbats, encara que passin molt prop del Sol, ens fa notar que deurà de tractar-se en tot cas d'hipèrboles d'asímtotes OA' , OT' quasi en línia recta (fig. 2).

Considerem en forma precisa un raig hiperbòlic que passi quasi tocant l'esfera solar en V . Sigui O el centre de la hipèrbole, S el del Sol, i, per tant, el focus de la mateixa hipèrbole. V serà el seu vèrtex, i si es designa amb a el semieix transvers, amb e l'excentricitat, tindrem per definició

$$OV = a, \quad OS = ae, \quad SV = R = a(e - 1).$$

Per altra banda, per la geometria analítica se sap que, si es representa amb δ l'angle (extern) comprès entre les dues asímtotes,

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

En el cas que ens ocupa, δ deu ésser molt petit, i, per tant, e grandíssim, per raó de la fórmula que acabem de transcriure. Podrem, doncs, aproximadament, suposar la tangent igual a l'arc i $\frac{1}{e}$ despreciable comparat amb la unitat. Tenint això en compte, en lloc de

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e},$$

es pot escriure

$$\delta = \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{2}{e - 1} .$$

Recordant la relació $R = a(e - 1)$, resulta definitivament com a mesura de δ en funció de les dues llargàries R i a :

$$(7) \quad \delta = \frac{2a}{R} .$$

El semieix transvers a , en el moviment hiperbòlic degut a l'atracció newtoniana d'una massa M , està clàssicament relacionat amb la constant E de les forces vives per la fórmula

$$E = f \frac{M}{2a} .$$

Substituint a , i posant per E el seu valor $\frac{1}{2} c^2$, la (7) es transforma en

$$(7') \quad \delta = 2 \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} ,$$

i d'aquesta, tenint en compte la (6), resulta:

$$\delta = 4,28 \cdot 10^{-6} .$$

El segon membre és un nombre quebrat que expressa

l'angle δ en radiants. Per tenir-lo en segons d'arc hem de multiplicar per

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 57^\circ 17' 45'' = 206\,265'',$$

i amb això resulta

$$(8) \quad \delta = 0''88 \quad .$$

Immediatament es reconeix que aquest angle δ expressa precisament la mesura de la *deflexió*, o sia de la màxima desviació angular de què és susceptible (amb la base del principi de proporcionalitat) un raig estelar per l'efecte gravitatori del Sol. Suposem, en efecte, que considerem un raig de llum que prové d'un astre A i arriba a un observador terrestre T, seguint un arc d'hipèrbole que passa ran de la superfície solar en V, com en la fig. 2. La direcció de la hipèrbole en T, segons la qual l'observador rep el raig de llum, es confon amb la de l'asíptota OT; la direcció segons la qual la llum ha sortit de l'astre és la de la tangent en A, que es confon pel seu cantó amb l'altra asíptota AO. *c. v. p.*

Naturalment A'O es pot identificar amb la direcció segons la qual T percep l'estrella en condicions normals, o sia quan, allunyant-se el Sol de la direcció Terra-Astre, i romanent insensible la pertorbació gravífica corresponent, el raig visual torna a ésser rectilini, ço és, separa de la trajectòria rectilínia en forma gairebé despreciable.

No serà inútil observar que si el raig visual d'una estrella, en lloc de passar ran de la superfície solar, passa a una distància $R_1 > R$ del centre del Sol, la deflexió disminueix precisament en raó inversa de la dita distància perihèlia R_1 .

Basta observar que l'expressió (7) de δ segueix naturalment subsistent, per qualsevol estrella visible de la Terra, amb sols que es substitueixi en lloc de R la distància perihèlia R_1 . Tindrem, doncs, en conformitat

$$\delta = \frac{2a}{R_1} = \frac{2a}{R} \frac{R}{R_1}.$$

El factor $\frac{2a}{R}$ ha estat calculat ara mateix, i així resulta, definitivament,

$$\delta = 0.88 \frac{R}{R_1}.$$

I com que R correspon a $16'$, basta, evidentment, que la distància angular del centre del Sol sigui de molt pocs graus, perquè δ no passi de poques centèsimes de segon i corri el perill de romandre del tot inadvertit, com si el raig fos rigorosament rectilini.

9. *Retorn al cas general d'un camp de forces qualsevol.* — *Equacions de variacions dels raigs lluminosos, que compendia la consideració ordinària associada al principi de proporcionalitat.* — Ja hem recordat, a l'acabament del § 6, que en un camp de forces general de potencial U , la propagació dels raigs lluminosos és regeix per les (3), (4), o sia per les mateixes equacions que convenen al moviment d'un punt material; solament (§ 7) convé especificar la constant de les forces vives E atribuint-li el valor $\frac{1}{2} c^2$.

Amb això es té

$$v = \sqrt{c^2 + 2U},$$

i l'equació de variacions (5), que defineix comprensivament el feix de trajectòries coincidents amb els raigs lluminosos, s'escriu

$$\delta \int \sqrt{c^2 + 2U} \, ds = 0 .$$

o, ço que és igual, dividint tots dos membres per c ,

$$(9) \quad \delta \int \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}} \, ds = 0 .$$

III

LA RELATIVITAT GENERAL I LES SEVES CONSEQÜÈNCIES CONCRETES TOCANT A LA TRAJECTÒRIA DELS RAIGS LLUMINOSOS EN UN CAMP DE FORCES.

10. *Temps i espai en la física clàssica. — Demolició relativista de les premisses tradicionals.* — Dues són les bases de l'habitual representació geomètrica i cinemàtica dels fenòmens naturals:

1.ª L'espai en el qual semblants fenòmens es localitzen és rigorosament euclidi, és a dir, posseeix les conegudes característiques que li atribueix la intuïció directa, disciplinada i codificada per la geometria elemental.

2.ª El temps es pot concebre i (almenys en abstracte), mesurar independentment de qualsevol referència espacial; o sia, existeix un absolut temps al qual es poden imaginar referits els rellotges de tots els observatoris. És aquest el temps considerat en la llei de la inèrcia, en la constància de la velocitat c de la llum en l'èter, etc.

Ara bé : l'anomenada relativitat restringida (o de la primera classe) ha començat amb rebutjar aquesta segona base, fent veure, per raó de les mateixes modalitats físiques de mesura del temps, que dos observatoris en moviment (uniforme) l'un respecte de l'altre, poden arribar, amb idèntic procediment (canvi de senyals), a apreciar-lo en forma distinta. D'on l'oportunitat de modificar totes les imposicions conceptuals, renunciant al temps absolut i substituint-li un postulat que posa, com si diguéssim, sota el mateix patró, dos observatoris que estan en moviment (uniforme) l'un respecte de l'altre. El postulat consisteix a admetre la igualtat, per a tots dos, de la velocitat de propagació d'un mateix raig de llum, mentre, segons la cinemàtica clàssica, aquestes dues velocitats deuran diferir en la corresponent al moviment relatiu dels dos observatoris. Amb això s'estableix una relació entre la mesura del temps i la de l'espai, i es vénen a alterar els primers elements o la base de la cinemàtica. Tenint compte de les conseqüents modificacions, resta explicat de la manera més satisfactòria el resultat negatiu de l'experiment de Michelson, així com l'arrastre parcial de les ondes lluminoses en un medi en moviment, demostrat per les experiències de Fresnel; resultant, per altra banda, que, pels fenòmens ordinaris de la mecànica dels cossos ponderables (velocitats petites en comparació de c), les correccions són del tot desprezables.

Mes, revolucionant sota l'aspecte especulatiu la cinemàtica i la mecànica i amb aquestes tota la Física, la relativitat de la primera manera respectava encara, quant a la localització dels fenòmens en l'espai, els postulats de la geometria elemental. En realitat, discussions apassionades entorn de la naturalesa mètrica de l'espai ambient s'havien produït, com és ben conegut, en el segle passat, amb motiu de la geometria no euclídia, o geo-

metria dels espais de curvatura constant. Amb tot, per raó de les comprovacions efectuades per l'astronomia i per la mecànica, s'havia arribat a la conclusió de què, si és que l'espai físic és de curvatura constant, no nul·la, la diferència amb un espai euclidi (curvatura rigorosament nul·la) deuria ésser tan petita que escapava a les més fines observacions. Així, semblava vençuda l'eventualitat d'haver de recórrer a un més complicat esquema geomètric, reforçant-se la hipòtesis (volem dir el *sentiment*) que el nostre espai és rigorosament euclidi.

Però també aquest últim credo científic havia d'ésser sacrificat per a encabir, en una concepció unitària, espai, temps i gravitació. A tant arriba la relativitat general d'Einstein. Resumir, encara que en la forma més sumària, son contingut específic, no és possible sense una preparació adequada. Relegant al lector, desitjós d'assolir una idea d'aquesta radical transformació de la filosofia natural, a qualsevol de les exposicions de conjunt fins ara publicades⁽¹⁾, em limitaré aquí a referir el que sigui estrictament necessari per a comprendre la gènesi de les fórmules en què es compendien les conseqüències òptiques de primera aproximació.

II. *Modificacions de l'espai. — Influència en la marxa dels raigs lluminosos. — Fórmula final.* — A la incondicionada validesa de la Geometria euclídia, es substitueix, segons Einstein, la hipòtesi, ja assolida en abstracte per Riemann i per Clifford, que també la naturalesa mètrica de l'espai (que s'exterioritza en les relacions

1. Cfr. en particular a A. EINSTEIN, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. Braunschweig, Vieweg (3.ª ed.), 1920. — A. S. EDDINGTON, *Space, time, gravitation*. Cambridge University Press 1920. A qui vulgui profunditzar, donant-se també compte del desenrotllament matemàtic, són especialment recomanables les lliçons de H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*. Berlin, Springer (3.ª ed.), 1920, o les de R. MARCOLONGO, *Relatività*. Messina, Principato, 1921.

entre els diversos elements d'una figura general) pot dependre dels fenòmens que s'hi desenrotllen; en particular per la presència i pel moviment de la matèria.

La hipòtesi mateixa es complica amb la ja postulada fusió de les mesures de l'espai i del temps, i es concreta en un sistema d'equacions diferencials que presideixen aquestes deformacions espaials i temporals. Ja es comprèn que es tracta de deformacions petitíssimes, les quals no s'adverteixen en els fenòmens, que ja són suficientment representats *grosso modo* amb les teories ordinàries; mes en alguns, encara que pocs casos, se'n poden treure conseqüències experimentals apreciables. Entre aquestes, celebèrrima, l'explicació del desplaçament secular del periheli de Mercuri, davant del qual havien quedat estèrils tots els esforços de la mecànica celeste, que, en canvi, és suficient per a donar compte de particularitats encara més petites dels moviments planetaris.

Ara bé: la curvatura dels raigs lluminosos en un camp de forces, ja sabem pel precedent capítol II, que en quant al fet qualitatiu, no és una prerogativa de la teoria d'Einstein. Conservant en tot l'esquema clàssic, amb la sola hipòtesi addicional que l'energia i la matèria són manifestacions diverses solament per graus d'una mateixa entitat física pot deduir-se una explicació del fenomen. El desenrotllament matemàtic de tal premissa porta, com ja hem vist, a la fórmula de variacions (9) per definir en general la marxa dels raigs, i en particular [fórmula (8)] al valor numèric 0''88 per la deflexió que deuria ésser causada pel Sol sobre els raigs estelars que passen arran de la corona.

¿Quina conclusió dóna, fets els càlculs, la teoria d'Einstein, quan se l'aplica a preveure l'efecte de massa material sobre la propagació de la llum?

Ella implica, en primer lloc (és una de les seves bases,

com hem dit), canvi de la naturalesa mètrica de l'espai ambient, el qual no roman ja més euclidi, sinó que es recorba, com (descendent de tres a dues dimensions per tenir una analogia representable) s'esdevé a una superfície plana, membrana o planxa elàstica fixada en la vora quan és oprimida, p. e., en la part central.

Per altra banda, la mateixa teoria (limitant-se per simplicitat a la primera aproximació) porta a reconèixer que és suficient sobreposar la deformació de l'espai a la curvatura directa pròpia dels raigs, ja calculada per via energètica i representada per la (9).

En definitiva, *les coses s'esdevenen com si l'espai ambient* (que en realitat, o si volem ésser agnòstics, segons la concepció einsteniana, s'és recorbat) *romangués rigorosament euclidi i els raigs fossin definits pel principi de variació* ⁽¹⁾

$$(10) \quad \delta \int \sqrt{1 + \frac{4U}{c^2}} ds = 0$$

representant U el potencial newtonià de les masses que es prenen en consideració.

La comparació amb la (9) demostra que hi ha una sola diferència : el factor 4, en lloc de 2, coeficient de U. Es pot, doncs, inferir que, *segons la teoria de la relativitat general* (limitada a la primera aproximació, o sia retenint despreciables els termes de segon ordre en $\frac{U}{c^2}$), *els raigs lluminosos dintre d'un camp de forces de potencial U s'identifiquen amb un feix de trajectòries dinàmiques,*

1. Per a la demostració vegin-se les notes de T. LEVI-CIVITA «*Statica einsteniana*» Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVI (1.^a semestre 1917), pàgs. 459-470, i ds^a *einsteiniani in campi newtoniani I. : Generalità e prima approssimazione*, ibidem (2.^a semestre 1917), pàgs. 307-317.

corresponents, però, al potencial doble: $2U$. La constant de les forces vives característica del feix és $\frac{1}{2} c^2$ (això com en la teoria ordinària a la qual s'associï el postulat de proporcionalitat).

La substitució de $2U$ a U , en l'equació comprensiva que defineix els raigs, porta naturalment la mateixa substitució en les equacions que s'obtenen. Referint-nos en particular al cas de l'atracció solar, discutit en el capítol II, pel qual $U = \frac{fM}{r}$ (r distància del centre del Sol), bastarà materialment duplicar el coeficient fM en les diverses fórmules.

Resulta llavors, de les (7) i (8), que la *deflexió* (dels raigs que provenen d'una estrella i passen arran de la corona solar) *prevista per la teoria d'Einstein, és doble de la calculada amb els criteris ordinaris fonamentats en la simple proporcionalitat entre l'energia i massa material, i val:*

$$1''76 \quad .$$

És aquest un ordre de magnitud perfectament accessible a observacions astronòmiques afinades.

Noti's que per a Júpiter, l'efecte anàleg, també en condicions de màxim, amb prou feines si arriba a $0''017$, romanent, per tant, inapreciable.

12. *Confirmació experimental.* — Els eventuais desplaçaments angulars deguts al Sol són efectivament observables durant un eclipse total del mateix. Teòricament bastaria escollir una estrella fixa qualsevol, el raig visual de la qual passi arran del Sol en el moment de l'eclipse, i comparar la posició observada en tal ocasió amb la que

es treu dels catàlegs. En la pràctica, donada la limitada precisió dels catàlegs, que poden deixar incertituds de l'ordre de $1''$, es recorre a la confrontació de plaques fotogràfiques (de regions del cel pròximes a la corona solar) obtingudes durant l'eclipse i en condicions normals.

Una primera temptativa en aquest sentit fou promoguda per l'Observatori de Lick, en 1918; però la precisió de les observacions va resultar insuficient per al fi proposat.

A l'eclipse total del 29 de maig de 1919, dues expedicions simultànies, foren organitzades per la Reial Societat de Londres : l'una treballà a Sobral, en el Brasil septentrional, i l'altra a la illa del Príncipe, en el golf de Guinea, essent les dues localitats compreses en la zona de totalitat de l'eclipse. Els resultats de les observacions recollides en aquestes dues expedicions es pot resumir així ⁽¹⁾ : Les mitjanes dels desplaçaments observats a Sobral donen per la deflexió $1''98$ (amb error probable de $\pm 0''12$); la mitjana anàloga de les observacions a Príncipe dóna $1''61$ (amb error probable de $\pm 0''30$). Entre els dos valors experimentals hi ha la deflexió $1''76$, prevista per la relativitat general d'Einstein. Aquesta ha rebut amb això una nova i renombrada confirmació, romanent clarament excloses, sia la desviació nul·la de l'Òptica geomètrica, sia la desviació mitjana ($0''88$) que dóna la teoria ordinària, associant-li el sol postulat de proporcionalitat entre la massa i l'energia.

1. F. W. DYSON, A. S. EDDINGTON, C. DAVIDSON : *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's gravitational Field, from observations made at the Total Eclipse of May 29th 1919*. Philos. Transactions of the Royal Society of London, S. A.; vol. 220 (1920), pàgs. 291-333.

	Ptes.
BIBLIOTECA FILOLÒGICA	
I. — Documents en vulgar per a l'estudi de la llengua (segles XI, XII i XIII), per MN. PERE PUJOL.....	2
II. — Die Mundart von Alacant.—Beitrag zur Kenntnis des Valencianischen, von DR. P. BARNILS.....	4
III. — Diccionari Aguiló. Fascicles I a X. Cada un.....	4
IV. — La frontera catalano-aragonesa, per ANTONI GRIERA. Fascicle I.....	5
V. — Textes catalans avec leur transcription phonétique, précédés d'un aperçu sur les sons du catalan, par J. ARTEAGA PEREIRA, ordenats i publicats per P. BARNILS.....	4
VI. — Estudis romànics (Llengua i Literatura), vol. I.....	8
VII. — Vocabulari català-alemany del l'any 1502, edició facsimil segons l'únic exemplar conegut, acompanyada de la transcripció, d'un estudi preliminar i de registres alfabètics, per P. BARNILS.....	12
VIII. — Diccionari de rims, de Jaume March, editat per A. GRIERA.....	10
IX. — Estudis romànics (Llengua i Literatura), vol. II.....	12
X. — La versione catalana dell'Inchiesta del San Graal, secondo il Codice dell'Ambrosiana di Milano I. 79 sup., pubblicata da VINCENZO CRESCINI e VERNANCIO TODESCO.....	10
XI. — Diccionari ortogràfic, precedit d'una exposició de l'ortografia catalana segons el sistema adoptat per l'Institut d'Estudis Catalans. Redactat sota la direcció de P. FABRA, membre de la Secció Filològica.....	5
XII. — Gramàtica Catalana, per POMPEU FABRA (tercera edició).....	350
XIII. — Bibliographie élémentaire de l'ancien provençal, par J. ANGLADE. — L'article majorquin et l'article roman dérivé de 'ipse', par P. ROKSETH. — Les vocals tòniques del rossellonès, per P. BARNILS. — El llenguatge com a fet estètic i com a fet lògic, per M. DE MONTOLIU.....	10
Andreu Febrer. Poesies. Edició crítica per M. DE MONTOLIU... <i>En preparació.</i>	
Diccionari de la rima, per P. FABRA i E. GUANYABÉNS... <i>En preparació.</i>	
LABORATORI DE FONÈTICA	
Estudis fonètics, I.....	20
EDICIONS PEDAGÒGIQUES	
Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum quae ibericis versionibus, curante A. SEGALÀ, phil. prof. Vol. I.—CORNELII NEPOTIS. Praefatio et Miltiadis Themistoclisque Vitae (F. Crusat; A. M. Alves, S. J.; F. de Mello, S. J.; M. de Montoliu; C. Riba Bracons, interpretibus).....	1

	Ptes.
<i>En dipòsit:</i>	
Primer Congrés Internacional de la Llengua Catalana. Barcelona, 1908.....	4
SECCIÓ HISTÒRICO-ARQUEOLÒGICA	
Anuaris de l'Institut d'Estudis Catalans.	
Anuaris MCMVII-MCMXIV, Cada un.	30
• MCMXV-MCMXX. <i>En premsa.</i>	
Les pintures murals catalanes.	
Fascicle I.—Pedret. (<i>Exhaurit.</i>)	
• II.—Sant Martí de Fenollar i Sant Miquel de la Seu.	10
• III.—Tahull i Bohí, Santa Maria d'Aneu i Sant Pere del Burgal.....	10
• IV.—Ginestare de Cardós, Esterri de Cardós, Santa Eulàlia d'Estahon, Santa Maria de Mur i Sant Pere de Ager.....	10
Les Monedes catalanes, per JOAQUIM BOTET i SISÓ.	
Volum I..... (<i>Exhaurit.</i>)	
• II.....	12
• III i darrer.....	20
Documents per la Història de la Cultura catalana mig-èval, publicats per A. RUBÍ i LLUCH.	
Volum I, contenint més de 500 documents..... (<i>Exhaurit.</i>)	
Volum II i darrer.....	25
L'Arquitectura romànica a Catalunya, per J. PUIG I CADAFALCH, A. DE FALGUERA i J. GODY.	
Volum I.—Precedents: L'Arquitectura romana; l'Arquitectura cristiana pre-romànica..... (<i>Exhaurit.</i>)	
Volum II.—Des del segle IX a les darreries del segle XI.....	25
Volum III i darrer.—Els segles XII i XIII.....	35
Les Obres d'Auzias March. Edició crítica en vista de tots els manuscrits i totes les edicions, per AMADEU PAGÈS.	
Volum I. — Introducció. Text de les poesies I-LXXIV.....	12
Volum II i darrer.—Poesies LXXV-CXXVIII. Glossari.....	12
Edició de 40 exemplars en paper de fil.	50
Itinerari de Jaume I «El Conqueridor», per JOAQUIM MIRET I SANS.....	
ESTUDIS DE BIBLIOGRAFIA LUL·LIANA	
I.—L'Edició maguntina de Ramon Lull, pel DR. A. GOTTRON.....	5
II.—Bibliografia de les Impressions lul·lianes, per ELIES ROSENT I ESTANISLAU DURAN..... <i>En premsa.</i>	

	Ptes.
BIBLIOTECA DE CATALUNYA	
Butlletí de la Biblioteca de Catalunya.	
Any I, 1914, n.º 1 (gener-abril)....	1'50
n.º 2 (maig-agost).....	3
n.º 3 (setembre-dbre.)....	1'50
Any II, 1915, n.º 4 (gener-agost)....	4
n.º 5 (setembre-dbre.)....	2
Any III, 1916, n.º 6 (gener-desembre) 5	
Any IV, 1917, n.º 7 (gener-desembre). 10	
Any V-VI, anys 1918-1919, n.º 8.	20

Butlletí d'Adquisicions.	
Any 1918.....	(Exhaurit.)
Anys 1919 i 1920.....	0'50

Catàleg de la Col·lecció Cervàntica Bonsons, per JOAN GIVANEL I MAS.	
Volum I (anys 1590-1800).....	20
Edició de 40 exemplars numerats en paper de fil.....	40
Volum II (anys 1801-1879).....	30
Edició de 40 exemplars numerats en paper de fil.....	50

Publicacions del Departament de Música de la Biblioteca de Catalunya.	
Volum I.—Els Madrigals i la Missa de Difunts de Brudieu, pel mestre FELIP PEDRELL i MN. HIGINI ANGLÈS. 20	
Volum II.—Catàleg dels manuscrits musicals de la Col·lecció Pedrell, per MN. HIGINI ANGLÈS.....	10

En dipòsit:

Catàleg de la Biblioteca musical de la Diputació de Barcelona, per FELIP PEDRELL (2 volums).....	65
---	----

MEMÒRIES I DOCUMENTS DELS TREBALLS FETS PER L'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

SECCIÓ FILOLÒGICA

1. Report dels treballs fets per les Oficines Lexicogràfiques durant el bienni de 1913-1914.....	0'25
2. Report dels treballs fets per les Oficines Lexicogràfiques durant el bienni de 1915-1916.....	0'25
3. Memòria sobre la preparació del Diccionari de Toponímia i Onomàstica catalanes presentada per l'Institut d'Estudis Catalans a l'Excm. Sr. President de la Mancomunitat de Catalunya.....	0'25

LABORATORI DE FONÈTICA EXPERIMENTAL

1. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans a l'Excm. Sr. President de la Diputació Provincial de Barcelona sobre la creació d'un Laboratori de Fonètica Experimental. —Barcelona, 1914.....	0'25
2. Treballs realitzats durant l'any 1917.....	0'50

SECCIÓ HISTÒRICO-ARQUEOLÒGICA

1. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans a l'Excm. Sr. Alcalde de Barcelona proposant la fundació d'una Biblioteca Catalana, i llegida en Consistori del dia 13 de novembre de 1907. — Barcelona, 1907.	0'25
---	------

2. Dictamen-acord de l'Institut d'Estudis Catalans proposant a l'excel·lentíssima Diputació de Barcelona l'adquisició de la Biblioteca Aguiló. — Barcelona, 1907.....	(Exhaurit.)
3. Memòria presentada als Excms. senyors President de la Diputació i Alcalde de Barcelona, per l'Institut d'Estudis Catalans, donant compte dels treballs fets des de la seva fundació fins al 31 de desembre de 1908. — Barcelona, 1908.....	(Exhaurit.)
4. Informe que l'Institut d'Estudis Catalans va traslladar a l'Excm. Sr. President de la Diputació de Barcelona sobre l'estat d'alguns arxius de Catalunya i la conveniència de la seva millor instal·lació. —Barcelona, 1908.	0'25
5. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans als Excms. senyors President de la Diputació i Alcalde de Barcelona donant compte dels treballs fets durant l'any 1909. — Barcelona, 1909.....	(Exhaurit.)
6. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans als Excms. senyors President de la Diputació i Alcalde de Barcelona donant compte dels treballs fets durant l'any 1910. — Barcelona, 1910.....	0'25
7. Exposició d'un pla de publicació de les Cròniques Catalanes. — Barcelona, 1912.....	0'25
8. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans als Excms. senyors President de la Diputació i Alcalde de Barcelona sobre la celebració del sisè Centenari de la mort de Ramon Lull. —Barcelona, 1914.....	0'25
9. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans a l'Excm. Diputació de Barcelona sobre la conservació i catalogació d'arxius i biblioteques d'interès històric. — Barcelona, 1914.....	0'25
10. Memòries presentades per l'Institut d'Estudis Catalans a l'Excm. Diputació de Barcelona sobre l'exploració d'estacions prehistòriques i la conservació i catalogació de monuments....	0'25
11. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans a l'Excm. Sr. President de la Diputació de Barcelona donant compte dels treballs fets durant l'any 1914 per a la conservació i catalogació d'arxius i biblioteques d'interès històric. — Barcelona, 1915.	(Exhaurit.)
12. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans als Excms. senyors President de la Diputació i Alcalde de Barcelona donant compte dels treballs fets durant l'any 1913. — Barcelona, 1916.....	0'25
13. Memòria presentada per l'Institut d'Estudis Catalans als Excms. senyors President de la Diputació i Alcalde de Barcelona donant compte dels treballs fets durant l'any 1914. — Barcelona, 1916.....	0'25